Tentamen i Elektromagnetiska fält

2014-08-27, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2014-08-27 kl 18.00
Granskning	2014-09-10 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

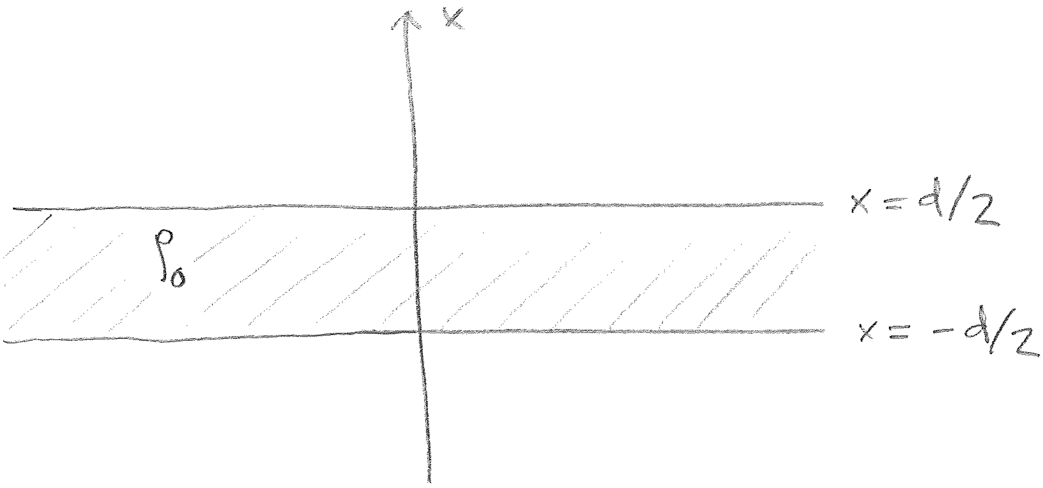
[Hjälpmedel: BETA]

1. Betrakta en gränsyta mellan två olika magnetiska material. Använd $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ och $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{v}}$ för att härleda randvillkor för (i) tangentialkomponenterna för det magnetiska fältet och (ii) normalkomponenterna för den magnetiska flödestätheten!

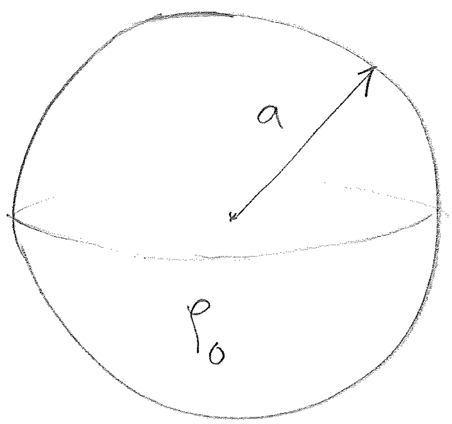
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

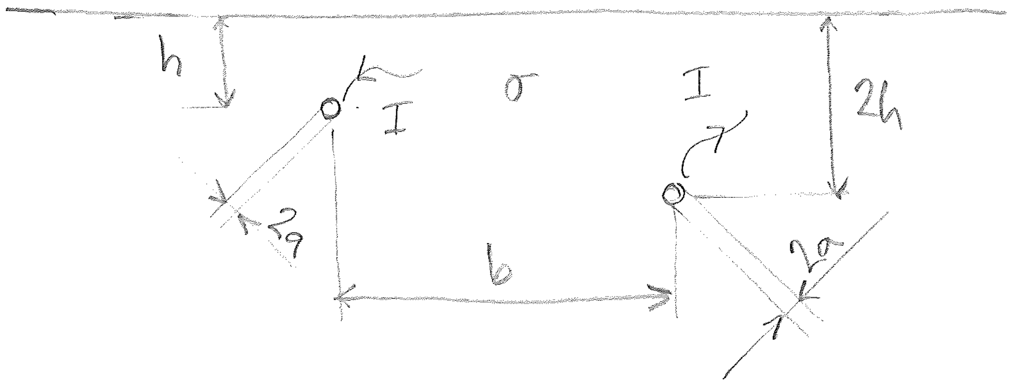
2. Området $|x| < d/2$ utgör en oändligt stor skiva med tjockleken d. I detta område finns en konstant volymladdningstäthet ρ_0. Beräkna det elektriska fältet överallt!



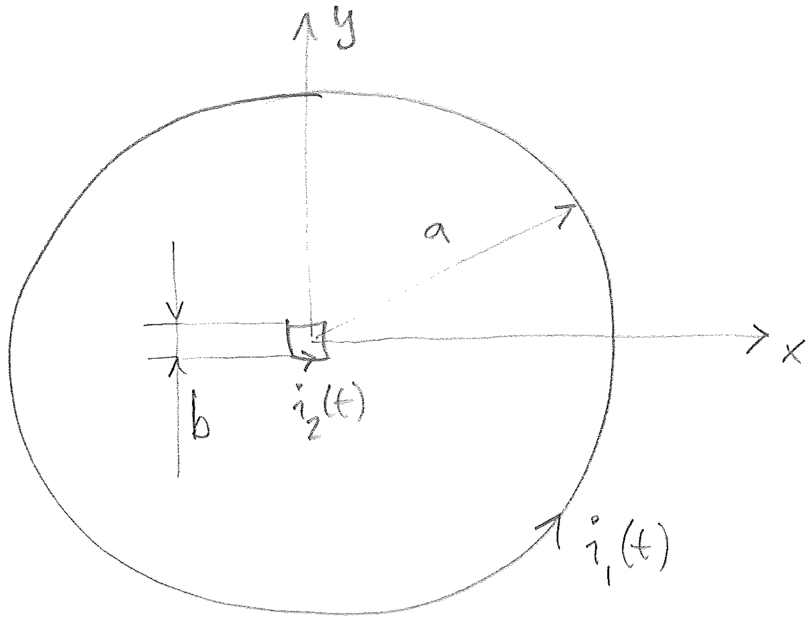
3. Ett klotformat område $R < a$ har den konstanta volymladdningstätheten ρ_0. Beräkna den totala elektriska energin för denna laddningsfördelning!



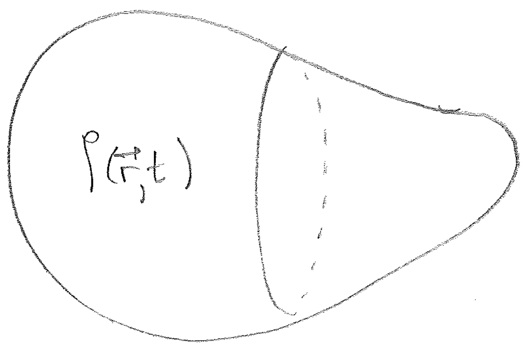
4. Två parallella metalltrådar med radien a är nedsänkta i en ledande vätska med konduktiviteten σ så som figuren visar. Trådarnas radie är mycket mindre än avstånden b och h i figuren. Båda trådarnas längd är L, där denna längd är mycket större än avstånden b och h i figuren. Den ledande vätskan upptar ett mycket stort område, vilket är avgränsat av ett elektriskt isolerande tråg. Beräkna resistansen mellan de två metalltrådarna!



5. En cirkulär slinga med radien a för strömmen $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ enligt figuren nedan. I den cirkulära slingans mittpunkt ligger en liten kvadratisk slinga med sidlängden $b \ll a$, så som figuren visar. (Båda slingorna ligger i samma plan.) Beräkna den inducerade strömmen $i_2(t)$ som flyter i den kvadratiska slingan då dess resistans är R! Problemet är kvasistationärt och självinduktansen i den kvadratiska slingan kan försummas.



6. En kropp med konstant ledningsförmåga σ och konstant permittivitet ϵ har volymladdningstätheten $\rho(\vec{r}, t=0) = \rho_0(\vec{r})$ vid begynnelsetiden $t = 0$. Beräkna $\rho(\vec{r}, t)$ för efterföljande tidpunkter $t > 0$!

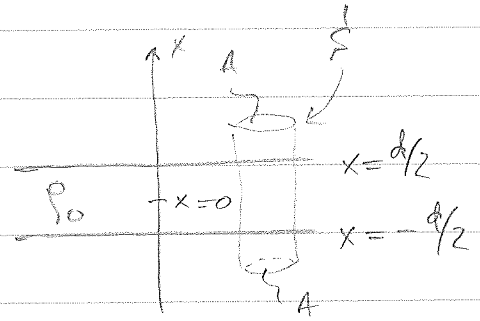


Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

2014-08-27

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2

(2)



Använd Gauss lag med cylinderformad Gaussyta enl. figur

$$\oint_{\hat{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{inne}$$

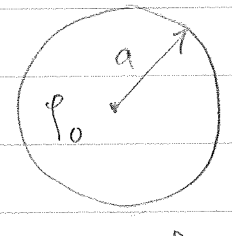
Symmetri ger att $\vec{D} = \hat{x} D_x(x)$ $\left(= \hat{x} \epsilon_0 E_x(x)\right)$ där $D_x(-x) = -D_x(x)$, vilket medför att

$$\oint_{\hat{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2 D_x(x) A = \begin{cases} \rho_0 A 2x & \text{då } |x| < d/2 \\ \rho_0 A d & \text{då } |x| \geq d/2 \end{cases}$$

$$D_x(x) = \begin{cases} -\rho_0 d/2 & \text{då } x \leq -d/2 \\ \rho_0 x & \text{då } |x| < d/2 \\ +\rho_0 d/2 & \text{då } x \geq d/2 \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\hat{x} \rho_0 d/2\epsilon_0 & \text{då } x \leq -d/2 \\ \hat{x} \rho_0 x/\epsilon_0 & \text{då } |x| < d/2 \\ +\hat{x} \rho_0 d/2\epsilon_0 & \text{då } x \geq d/2 \end{cases}$$

(3)



Gauss lag med sfärisk Gaussyta $\hat{S}$ och $\vec{D} = \hat{R} D_R(R)$, pga symmetri, ger

$$\oint_{\hat{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 4\pi R^2 D_R(R) = Q_{inne} = \begin{cases} \rho_0 4\pi R^3/3 & \text{då } R < a \\ \rho_0 4\pi a^3/3 & \text{då } R \geq a \end{cases}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \begin{cases} \hat{R}\ \rho_0 R/3 & \text{då} \quad R<a \\ \hat{R}\ \rho_0 a^3/3R^2 & \text{då} \quad R \geq a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv = \frac{1}{2}\int_{V_{R<a}} \varepsilon_0 E^2 dv + \frac{1}{2}\int_{V_{R\geq a}} \varepsilon_0 E^2 dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{R=0}^{a} \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_0 R}{3}\right)^2 4\pi R^2 dR + \frac{1}{2}\int_{R=a}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_0 a^3}{3R^2}\right)^2 4\pi R^2 dR$$

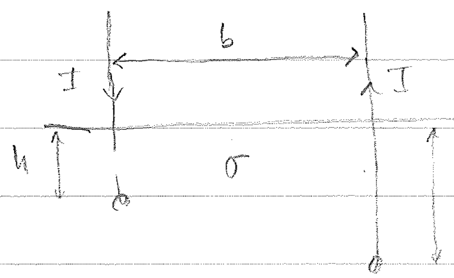
$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\int_{R=0}^{a} R^4 dR + \frac{2\pi\rho_0^2 a^6}{9\varepsilon_0}\int_{R=a}^{\infty}\frac{dR}{R^2}$$

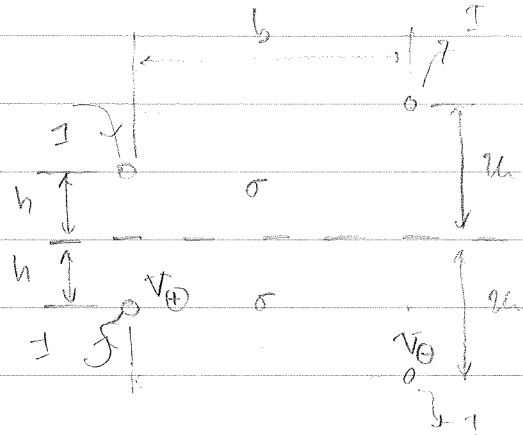
$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\left(\left[\frac{R^5}{5}\right]_{R=0}^{a} + a^6\left[\frac{-1}{R}\right]_{R=a}^{\infty}\right)$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{a^5}{5} - 0 - (0 - a^5)\right)}_{= 6a^5/5}$$

$$= \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

4





Spegling i isolerande vattenyta ger ström med samma tecken.

Beräkna potentialerna

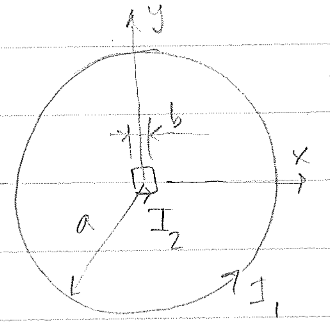
$$V_{(+)} = \frac{I/L}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{b^2+(3h)^2}}{2h} \right)$$

$$V_{(-)} = \frac{I/L}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}} \cdot \frac{4h}{\sqrt{b^2+(3h)^2}} \right)$$

$$U = V_{(+)} - V_{(-)} = \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln\left[\frac{(b^2+h^2)(b^2+(3h)^2)}{8a^2h^2} \right]$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln\left[\frac{(b^2+h^2)(b^2+9h^2)}{8a^2h^2} \right]$$

5



Biot-Savarts lag för den cirkulära slingan ($\vec{r}' = \hat{r}(\varphi')a$) magnetisk flödestäthet i origo ($\vec{r} = \vec{0}$)

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \frac{\vec{I}_1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, dl'$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \vec{r}-\vec{r}' = -\hat{r}(\varphi')a & \vec{I} = I\hat{\varphi} \\ \vec{I}_1 \times (\vec{r}-\vec{r}') = +\hat{z} I_0 a & \\ |\vec{r}-\vec{r}'| = a & \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\hat{z} I_0 a}{a^3} \, a \, d\varphi = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{2a}$$

Flödet genom den lilla kvadraten blir

$$\Phi = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} \simeq \frac{\mu_0 I_0}{2a} b^2$$

vilket ger den inducerande strömmen

$$\mathring{I}_2 = \frac{-j\omega \Phi}{R} = -j\omega \frac{\mu_0 I_0 b^2}{2a \cdot R}$$

och motsvarande ström i tidsplanet är

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathring{I}_2 e^{j\omega t} \right\}$$

$$= \frac{\omega \mu_0 I_0 b^2}{2aR} \sin(\omega t)$$