Tentamen i Elektromagnetiska fält

2014-04-25, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2014-04-25 kl 18.00
Granskning	2014-05-14 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

1. Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord!

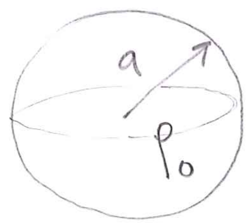
   (a) Gradienten

   (b) Divergensen

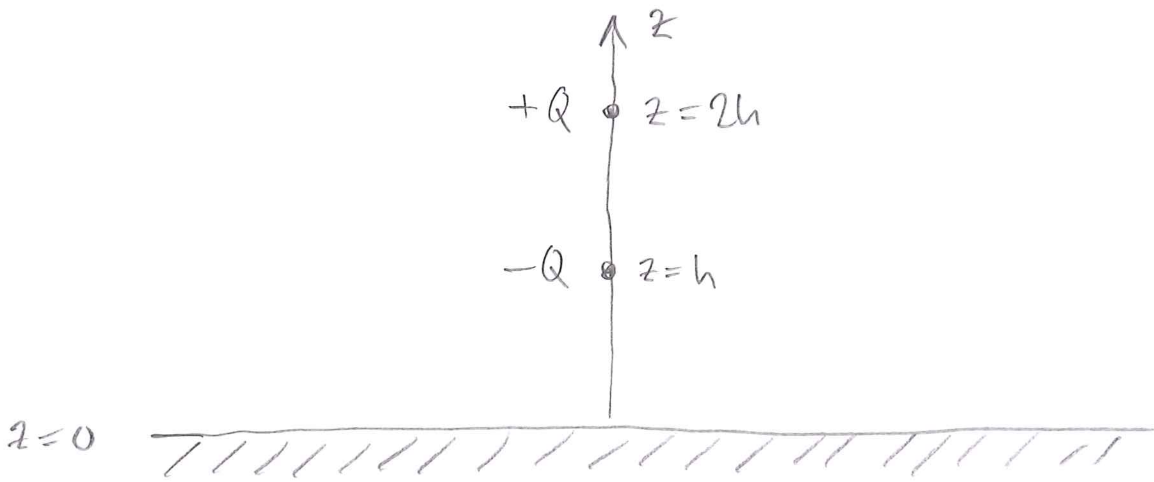
   (c) Rotationen

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

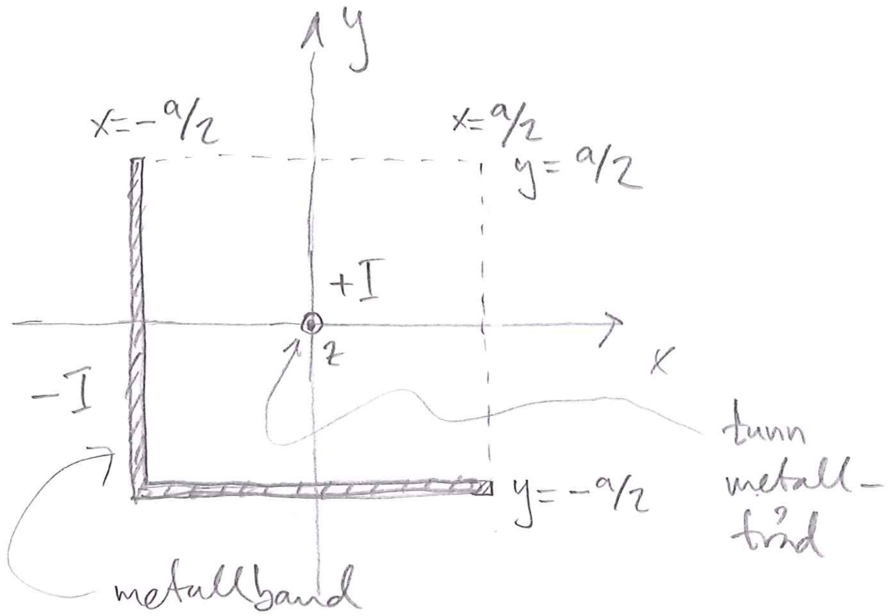
2. I ett klotformat område med radien a finns en konstant rymdladdningstäthet ρ_0. Beräkna det elektriska fältet överallt.



3. En oändligt stor metallskiva sammanfaller med planet $z = 0$. En elektrisk laddning $+Q$ är placerad längs z-axeln i punkten $z = 2h$ och en annan elektrisk laddning $-Q$ är placerad längs z-axeln i punkten $z = h$, där $h > 0$. Beräkna den inducerade ytladdning på metallskivan och uttryck rumsberoendet endast med hjälp av avståndet till origo.



4. Ett oändligt långt metallband har formats så att dess tvärsnitt sammanfaller med två sidor av en kvadrat med sidlängden a enligt figuren nedan. Metallbandet för den totala likströmmen I i negativ z-riktning. Beräkna den magnetiska kraften per längdenhet på en tunn metalltråd som sammanfaller med z-axeln (och kvadratens mittpunkt). Den tunna metalltråden fungerar som återledare genom att föra strömmen I i positiv z-riktning.

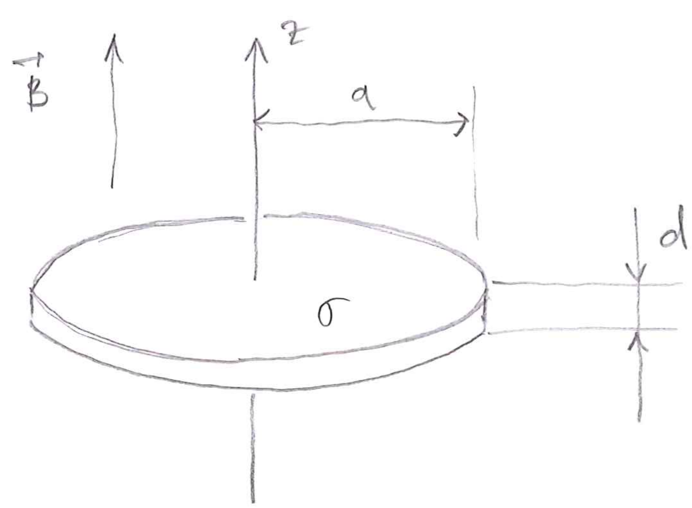


5. En tunn cirkulär metallskiva placeras med sin symmetriaxel längs z-axeln i ett i tiden sinusformigt varierande homogent magnetfält

$$\vec{B}(t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t)$$

Skivan har ledningsförmågan σ, radien a och tjockleken d. Beräkna medeleffektutvecklingen i skivan! Antag att magnetfältet från de inducerade virvelströmmarna kan försummas vid beräkningen!

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



6. Två oändligt stora metallskivor sammanfaller med planen $x = 0$ och $x = L$. I området mellan skivorna kan det magnetiska fältet i frekvensplanet skrivas på formen

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \hat{y}\boldsymbol{H}_0(\xi e^{+jkx} - e^{-jkx})$$

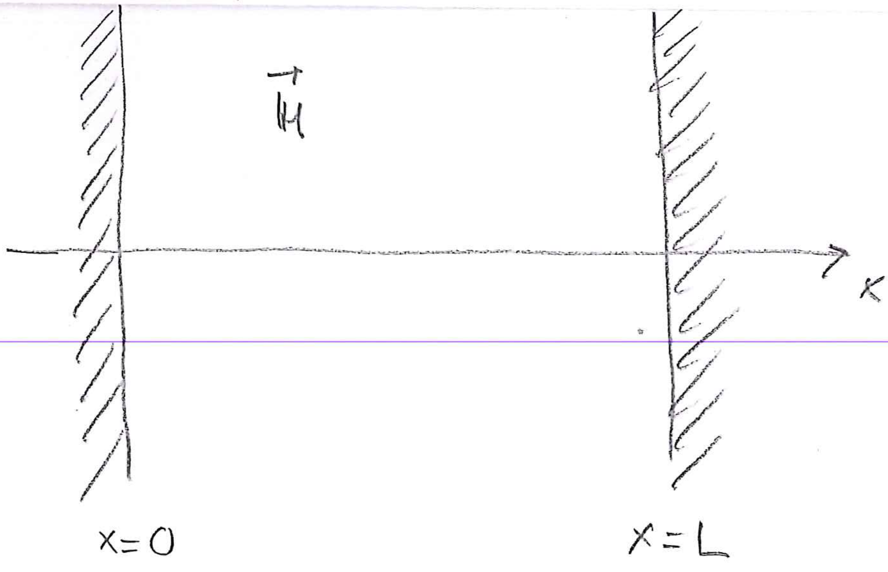
där $\boldsymbol{H}_0$ är en känd konstant. I området mellan plattorna är permittiviteten ϵ_0 och permeabiliteten μ_0.

(a) Beräkna ett värde för konstanten ξ så att randvillkoret för $x = 0$ är uppfyllt.

(b) Beräkna de vågtal k som gör att randvillkoret för $x = L$ är uppfyllt.

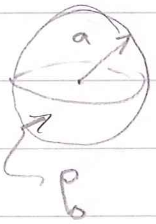
(c) Beräkna de vinkelfrekvenser ω som beskriver det magnetiska fältets tidsvariation, baserat på resultaten från (a) och (b), genom att använda vågekvationen

$$-\frac{d^2E_z}{dx^2} = \omega^2\epsilon_0\mu_0E_z$$



2014-04-25

ELETROMAGNETISKA FÄLT (EEM015)

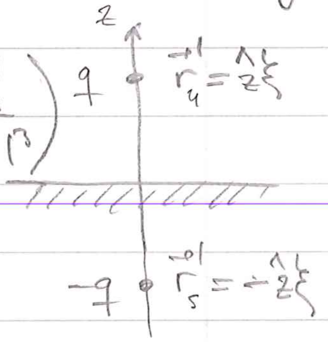
(2) 

Gauss lag och sfärisk symmetri (Gaussyta med radie R) ger

$$\oint_{\Gamma_R} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi R^2 E_R(R) = \frac{Q_{inne}}{\epsilon_0} = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{4\pi R^3}{3\epsilon_0} & \text{då } R<a \\ \rho_0 \dfrac{4\pi a^3}{3\epsilon_0} & \text{då } R\geq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{R}\,\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\begin{cases} R & \text{då } R<a \\ a^3/R^2 & \text{då } R\geq a \end{cases}$$

(3) Spegling av punktladdning q på höjden ξ över jordplan (sammanfaller med $z=0$) ger



$$\vec{E}(x,y,z=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_u'}{|\vec{r}-\vec{r}_u'|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_s'}{|\vec{r}-\vec{r}_s'|^3}\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \vec{r}-\vec{r}_u' = \hat{r}r - \hat{z}\xi \\ \vec{r}-\vec{r}_s' = \hat{r}r + \hat{z}\xi \end{array}\right\}$$

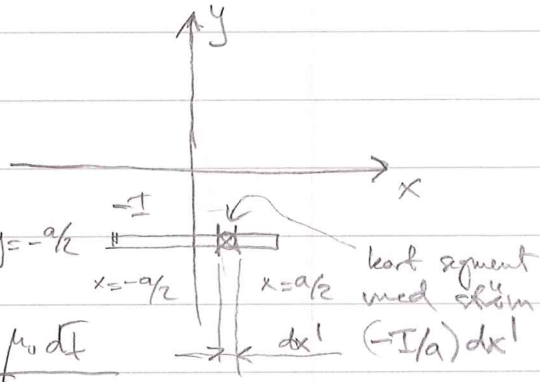
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\hat{r}r-\hat{z}\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}} - \frac{\hat{r}r+\hat{z}\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}\right) = -\hat{z}\,\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \rho_s = \hat{n}\cdot\vec{D}\Big|_{z=0} = \hat{z}\cdot(\epsilon_0\vec{E})\Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{\xi}{(r^2+\xi^2)^{3/2}}$$

Superposition ger

$$\rho_s = \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}} - \frac{2h}{(r^2+(2h)^2)^{3/2}}\right)$$

4) Beräkna flödestätthet i origo givet "en sida" av metallbandet, vilken delas i infinitesimala delar enligt figur nedan.



Ampères lag $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{omsl}$

för infinitesimalt bidrag

$dI = (-I/a)\,dx'$ ger

$$\vec{dB} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0}{2\pi r}\,dI = \hat{z}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\frac{\mu_0\,dI}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r}=\vec{0} \quad \& \quad \vec{r}\,' = \hat{x}x' - \hat{y}\,a/2 \\ \vec{r}-\vec{r}\,' = -\hat{x}x' + \hat{y}\,a/2 \\ |\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 = (x')^2 + (a/2)^2 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{-\hat{y}x' - \hat{x}\,a/2}{(x')^2+(a/2)^2}\left(-\frac{I}{a}dx'\right)$$

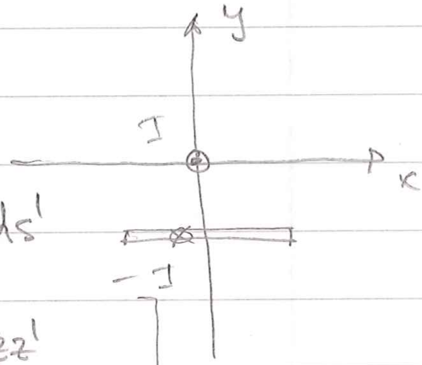
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{x'=-a/2}^{a/2}\frac{\hat{y}x' + \hat{x}\,a/2}{(x')^2+(a/2)^2}\,dx'$$

$$\overset{\text{symm.}}{=} \hat{x}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{a/2}\operatorname{atan}\left(\frac{x'}{a/2}\right)\right]_{x'=-a/2}^{a/2} = \hat{x}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,2\underbrace{\operatorname{atan}(1)}_{=\pi/4} = \hat{x}\,\frac{\mu_0 I}{4a}$$

Kraft per längdenhet ges av $\vec{F}/L = (\hat{z}I)\times\vec{B}\big|_{\vec{r}=\vec{0}}$ och mha superposition blir totalkraften

$$\frac{\vec{F}}{L} = (\hat{x}+\hat{y})\,\frac{\mu_0 I^2}{4a}$$

(4) Beräkna först kraft mellan "en sida" av bandet och tråden mha Biot-Savarts lag



$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}_s(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, ds'$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}=\vec{0} \quad \& \quad \vec{r}\,' = \hat{x}x' - \hat{y}\frac{a}{2} + \hat{z}z' \\ (\text{med } -a/2 \le x' \le a/2 \;\&\; -\infty \le z' \le \infty \\ \vec{r}-\vec{r}\,' = -\hat{x}x' + \hat{y}\frac{a}{2} - \hat{z}z' \\ |\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = \left[(x')^2 + (a/2)^2 + (z')^2\right]^{3/2} \\ \vec{J}_s = -\hat{z}\, I/a \\ ds' = dx'dz' \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x'=-a/2}^{+a/2}\int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{I/a\,(\hat{y}x' + \hat{x}\,a/2)}{\left[(x')^2+(a/2)^2+(z')^2\right]^{3/2}}\, dz'\, dx'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x'=-a/2}^{+a/2} \frac{I}{a}\left(\hat{y}x' + \hat{x}\frac{a}{2}\right) \underbrace{\left[\frac{z'}{\left[(x')^2+(a/2)^2\right]\sqrt{(x')^2+(a/2)^2+(z')^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{= \frac{2}{(x')^2+(a/2)^2}} dx'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{\hat{y}x' + \hat{x}\,a/2}{(x')^2+(a/2)^2}\, dx'$$

$$\underset{\text{symm.}}{=} \hat{x}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{a/2}\,\text{atan}\left(\frac{x'}{a/2}\right)\right]_{x'=-a/2}^{a/2}$$

$$= \hat{x} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} 2\,\mathrm{atan}(1) = \hat{x} \frac{\mu_0 I}{\cancel{8}\pi/a} \cancel{8}\frac{\cancel{\pi}}{4} = \hat{x} \frac{\mu_0 I}{4a}$$

Kraften per längdenhet blir därmed

$$\frac{\vec{F}}{L} = (\hat{z} I) \times \vec{B}\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \hat{y} \frac{\mu_0 I^2}{4a}$$

och superposition ger

$$\frac{\vec{F}}{L} = (\hat{x} + \hat{y}) \frac{\mu_0 I^2}{4a}$$

(6) Beräkna motsvarande elektriskt fält

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y(x) & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{z} \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \hat{z} \frac{H_0}{j\omega\varepsilon_0} \left(\xi jk e^{jkx} - (-jk) e^{-jkx} \right)$$

$$= \hat{z} \frac{k}{\omega\varepsilon_0} H_0 \left(\xi e^{jkx} + e^{-jkx} \right)$$

(a) $\hat{n} \times \vec{E}\Big|_{x=0} = \vec{0} \Rightarrow \xi + 1 = 0 \Rightarrow \xi = -1$

(b) $\hat{n} \times \vec{E}\Big|_{x=L} = \vec{0} \Rightarrow -e^{jkL} + e^{-jkL} = 0$

$\Rightarrow \sin(kL) = 0$

$\Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = n\pi/L$

där $n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) Elektriskt fält ges av

$$\vec{E} = \hat{z}\,\frac{kH_0}{\omega\epsilon_0}\left(e^{-j\frac{n\pi x}{L}} - e^{+j\frac{n\pi x}{L}}\right)$$

$$= \hat{z}\,\underbrace{\left(\frac{-2jkH_0}{\omega\epsilon_0}\right)}_{\hat{=}E_0}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{dE_z}{dx} = E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$\frac{d^2E_z}{dx^2} = -E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E_z$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2E_z}{dx^2} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E_z = \omega^2\epsilon_0\mu_0 E_z$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\,\frac{n\pi}{L} \quad \text{där } n = 1, 2, 3, \dots$$