Tentamen i Elektromagnetiska fält

2013-12-19, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.45
Förfrågningar	Tel. ankn. 1814 Johan Winges, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2013-12-19 kl 18.00
Granskning	2014-01-22 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

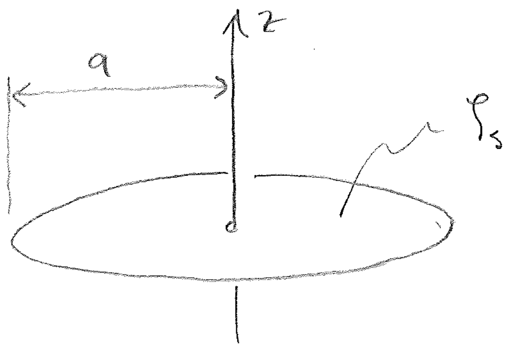
1. Visa varför högerledet i Ampères lag, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v$, från magnetostatiken måste modifieras för att ge en ekvation, som är giltig även under dynamiska förhållanden och att denna blir

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

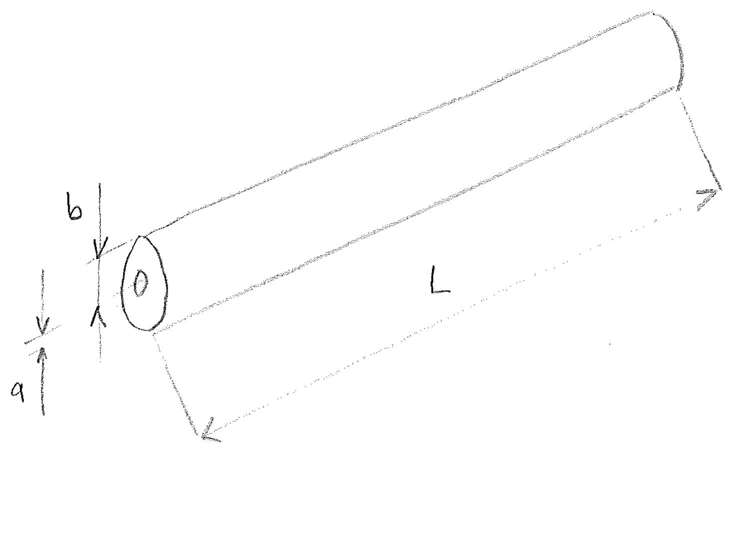
Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

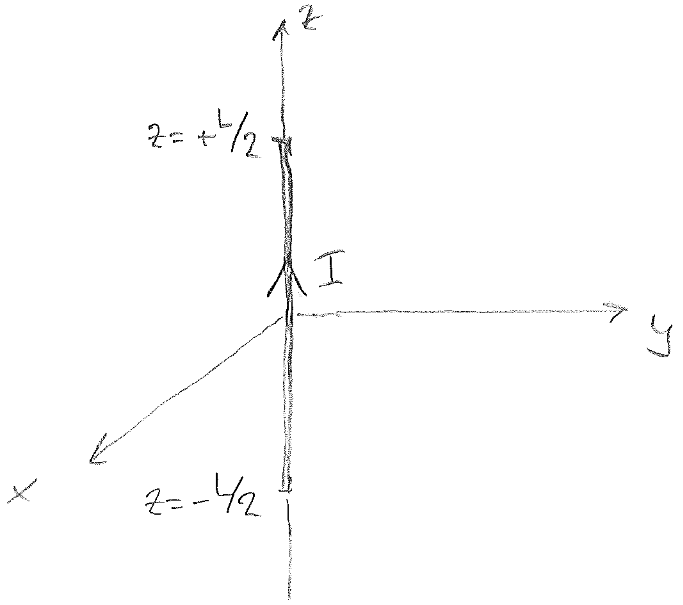
2. En tunn cirkulär skiva med radie a ligger i planet $z = 0$ och skivans centrum sammanfaller med origo. Skivan har den konstanta ytladdningstätheten $\rho_s = Q/(\pi a^2)$. Bestäm potentialen längs z-axeln för $z > 0$.



3. En koaxialkabel har längden L. Innerledaren har radien a och ytterledaren har radien b. Området mellan innerledare och ytterledare är fyllt med ett material som har konduktiviteten σ. Beräkna den totala effektutvecklingen i området med konduktiviteten σ då en spänningskälla med den konstanta spänningen U kopplas mellan innerledare och ytterledare.



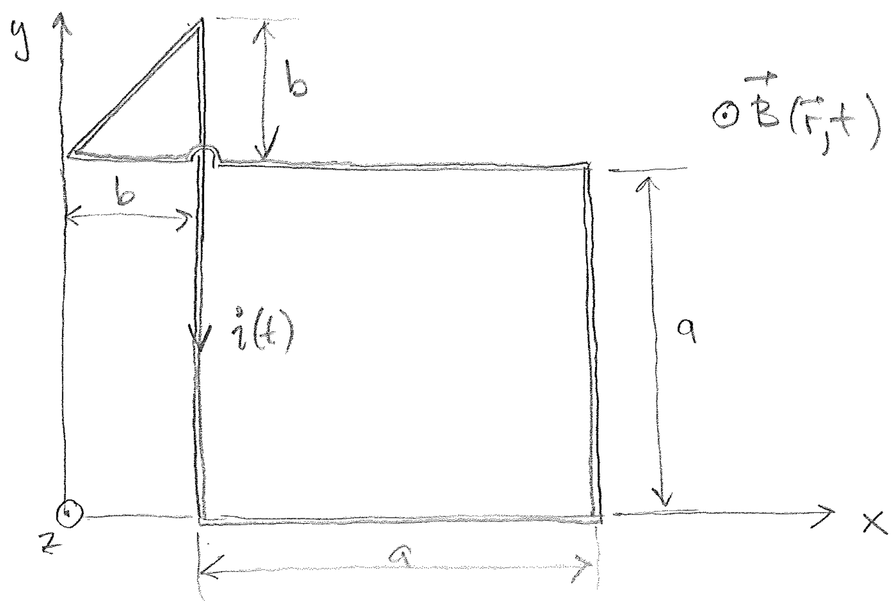
4. En rak ändlig ledare befinner sig i vakuum så som figuren nedan visar. Ledaren har längden L och för strömmen I. Beräkna den magnetiska flödestätheten i en godtycklig fältpunkt.



5. En trådslinga formad enligt figuren befinner sig i ett område med en magnetisk flödestäthet som ges av

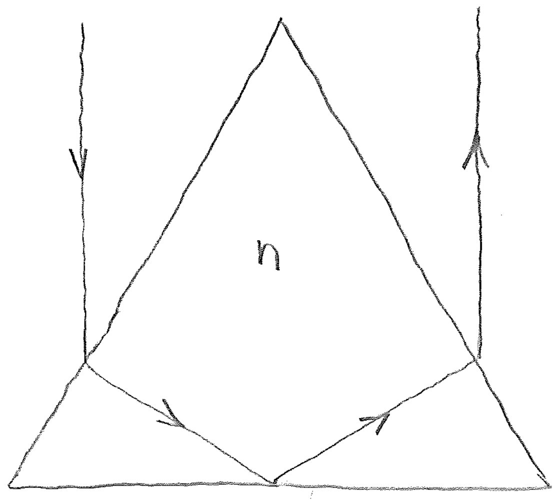
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{z}B_0 \begin{cases} 0 & \text{för} \quad t \leq 0 \\ 4t(T-t)/T^2 & \text{för} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{för} \quad T \leq t \end{cases}$$

Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ som flyter i tråden då dess resistans är R, givet den positiva riktning som visas i figuren. Problement kan anses kvasimagnetostatiskt och slingans självinduktans kan försummas.



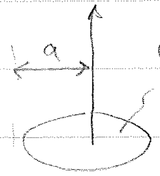
6. En ljusstråle bryts och totalreflekteras i ett förlustfritt likbent prisma, som figuren visar. Brytningen sker vid Brewstervinkel och reflexionen under villkoret för totalreflexion. Inkommande och återvändande strålar är parallella. Ställ upp en ekvation som beskriver för vilka värden på brytningsindex n som denna situation är möjlig.

   Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



ELEKTROMAGNETISKA FÄLT 2013.12.19

(2)



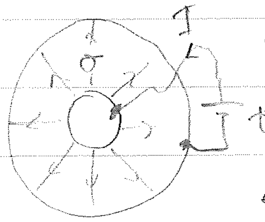
$$\rho_s = \frac{Q}{\pi a^2} \qquad V(\vec{r}=\hat{z}z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dS'$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}\,' = \hat{r}r' \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(r')^2+z^2} \\ dS' = 2\pi r'dr' \quad \& \quad r': 0 \to a \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{a} \frac{\rho_s}{\sqrt{(r')^2+z^2}}\,2\pi r'dr' = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{a} \frac{r'}{\sqrt{(r')^2+z^2}}\,dr'$$

$$= \frac{Q}{2\pi a^2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(r')^2+z^2}\right]_{r'=0}^{a} = \frac{Q}{2\pi a^2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - \underbrace{|z|}_{=z \text{ då } z>0}\right)$$

(3)



Symmetri $\Rightarrow$ $\vec{J}_V = \hat{r}J_{V,r}(r)$

$$\oint_S \vec{J}_V\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow 2\pi r L J_{V,r}(r) - I = 0$$

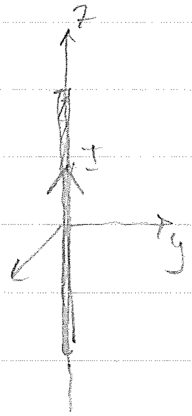
$$\Rightarrow \vec{J}_V = \hat{r}\frac{I/L}{2\pi r} \Rightarrow \vec{E} = \vec{J}_V/\sigma = \hat{r}\frac{I/L}{2\pi\sigma r}$$

$$U = -\int_{L_{\ominus\to\oplus}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r=a}^{b}\left(\hat{r}\frac{I/L}{2\pi\sigma r}\right)\cdot(-\hat{r}\,dr) = \underbrace{\frac{1}{2\pi\sigma L}\ln(b/a)}_{=R}\,I$$

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_V\,dv = \int_{r=a}^{b}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{I/L}{2\pi r}\right)^2 2\pi r L\,dr = \frac{I^2}{2\pi\sigma L}\ln(b/a) = RI^2$$

$$= R\,(U/R)^2 = U^2/R = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)}U^2$$

④



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \vec{r} = \hat{r}r + \hat{z}z & \vec{r}' = \hat{z}z' \\ \vec{r}-\vec{r}' = \hat{r}r + \hat{z}(z-z') & \\ |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+(z-z')^2} & \\ d\vec{l}' = \hat{z}dz' \quad \& \quad z' : -L/2 \to L/2 & \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{z'=-L/2}^{L/2} \frac{(\hat{z}dz')\times[\hat{r}r + \hat{z}(z-z')]}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{\varphi}\int_{z'=-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

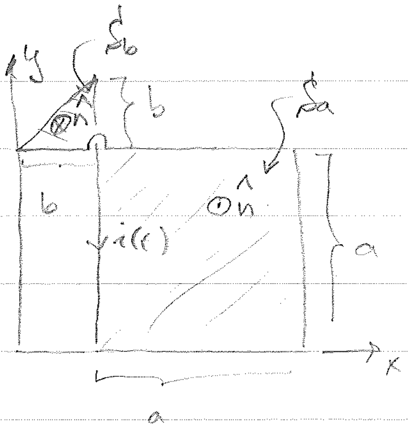
$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Subs. } \xi = z - z' \Rightarrow d\xi = -dz' \\ z' = -L/2 \Rightarrow \xi = z + L/2 \\ z' = +L/2 \Rightarrow \xi = z - L/2 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{\varphi}\int_{\xi=z-L/2}^{z+L/2} \frac{d\xi}{[r^2+\xi^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{\varphi}\left[\frac{\xi}{r^2\sqrt{r^2+\xi^2}}\right]_{\xi=z-L/2}^{z+L/2}$$

$$= \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{z+L/2}{\sqrt{r^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{r^2+(z-L/2)^2}}\right)$$

5



$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{S_a} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{S_b} \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{S_a} \vec{B}\cdot(\hat{z}\,ds) + \int_{S_b} \vec{B}\cdot(-\hat{z}\,ds)$$

$$= B_z\left(a^2 - b^2/2\right)$$

$$\mathcal{V}_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\left(a^2 - \frac{b^2}{2}\right)\frac{dB_z}{dt}$$

$$i = \frac{\mathcal{V}_{ind}}{R} = \frac{b^2/2 - a^2}{R}\,\frac{dB_z}{dt}$$

$$i(t) = \frac{b^2/2 - a^2}{R}\,B_0 \begin{cases} 0 & \text{för } t<0 \\ \frac{4}{T^2}(T-2t) & \text{för } 0<t<T \\ 0 & \text{för } T<t \end{cases}$$