Tenta 2013-08-20

(1) Teori: Utgå från Maxwells ekvationer och härled de homogena vågekvationerna för $\vec{E}$ och $\vec{H}$ i ett källfritt medium med μ och ϵ.

$$\left.\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &&= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &&= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_s &&\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 &&\Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = 0
\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ty källfritt.}$$

- Antar μ och ϵ konstanta i rum och tid.

BETA: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ (s.249.)

Vågekvation för $\vec{E}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad \blacksquare$$

Vågekvation för $\vec{H}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad \blacksquare$$

(2) I ett sfäriskt skal, $a<R<b$, finns rymdladdningstäthet $\rho_v(R) = \rho_0 \frac{R}{a}$. Beräkna V i sfärens mittpunkt.

Alternativa lösningsmetoder: <u>Superposition</u> alt. <u>Gauss</u>.

<u>Superposition:</u> V vid $\vec{r}=\vec{0}$ från $\rho_v(R)$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_v(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'$$

Här:
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{0} \\ \vec{r}\,' = \hat{R}R', \quad a<R'<b \\ dv' = (R')^2 \sin\theta' dR' d\theta' d\varphi' \qquad \text{BETA (s. 253)} \\ V: \{a<R'<b,\ 0<\theta'<\pi,\ 0<\varphi'<2\pi\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{V(\vec{0})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\rho_0 \frac{\cancel{R'}}{a}}{\cancel{R'}}\cdot (R')^2 dR'\cdot \underbrace{4\pi}_{=\iint \sin\theta' d\theta' d\varphi'} =$$

$$= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 a}\left[\frac{(R')^3}{3}\right]_a^b = \underline{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a}\left(b^3-a^3\right)} \quad [V]$$

<u>Gauss:</u> Först $\vec{E}$, sedan $V = -\int_{\vec{r}_\infty\to\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

Sfärisk symmetri: $\vec{E} = \hat{R}E_R(R)$

Gauss lag: $\oint_S \epsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho_v\, dv$ sfärisk Gauss yta.

$$\Rightarrow \epsilon_0 4\pi R^2\cdot E_R = \int_V \rho_v\, dv = \begin{cases} R>b: & \int_a^b \rho_0 \frac{R}{a}R^2 dR\cdot 4\pi = \frac{\rho_0\pi}{a}\left(b^4-a^4\right) \\ a<R<b: & \int_a^R \rho_0\frac{R}{a}R^2 dR\cdot 4\pi = \frac{\rho_0\pi}{a}\left(R^4-a^4\right) \\ R<a: & 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vi kan $\vec{E}$. Jord $R\to\infty$, ty $V\to 0$ då.

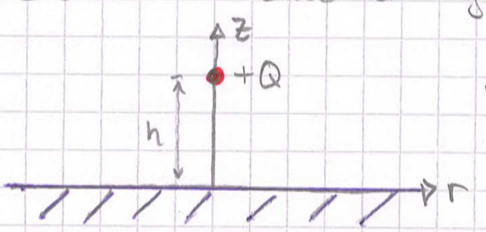
Nu beräknar vi $V(R=0)$:

$$\underline{V(R=0)} = -\int_{\vec{r}_\infty\to\vec{0}} \vec{E}\cdot(-\hat{R}dR) = \int_0^a \vec{0}\cdot\hat{R}dR + \int_a^b \frac{\rho_0\pi}{4a\epsilon_0}\left(R^2-\frac{a^4}{R^2}\right)\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR +$$

$$+\int_b^\infty \frac{\rho_0\pi}{4a\epsilon_0}\cdot\frac{(b^4-a^4)}{R^2}\hat{R}\cdot\hat{R}\,dR = \frac{\rho_0\pi}{4a\epsilon_0}\left(\underbrace{\left[\frac{R^3}{3}+\frac{a^4}{R}\right]_a^b}_{\frac{b^3-a^3}{3}\ \cancel{+a^4/b}-a^3} + \underbrace{\left[-\frac{(b^4-a^4)}{R}\right]_b^\infty}_{+b^3\cancel{-a^4/b}}\right) = \underline{\frac{\rho_0\pi}{3a\epsilon_0}\left(b^3-a^3\right)} \quad [V]$$

//

③ Punktladdning Q, h ovanför oändlig metallskiva vid $z=0$.
Beräkna inducerad ytladdning.



Ytladdning: $\rho_s = \hat{n}_2 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)$

(Randvillkor, $\vec{D}_{metall} = \vec{0}$)

$\Rightarrow \quad \rho_s = \hat{z} \cdot \epsilon_0 \vec{E}(r, z=h)$

Finner $\vec{E}$ m.h.a. spegling.

→ Ersätter metallskiva med $-Q$ vid $z=-h$.

Beräknar $\vec{E}$ från två punktladdningar m.h.a superpos.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{2} \frac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|^2} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_k'}{|\vec{r}-\vec{r}_k'|}$$

Här: $\begin{cases} \vec{r} = \hat{r} r & \\ \vec{r}_1' = \hat{z} h & q_1 = +Q \\ \vec{r}_2' = -\hat{z} h & q_2 = -Q \end{cases}$

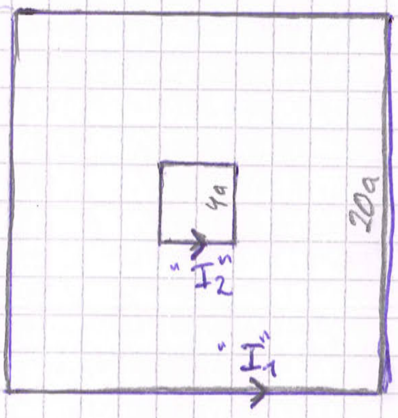
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q \cdot (\cancel{\hat{r} r} - \hat{z} h)}{(r^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{Q\,(\cancel{\hat{r} r} + \hat{z} h)}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \right)$$

Alltså:

$$\rho_s(r) = -\frac{Qh}{2\pi} \cdot \frac{1}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad [C/m^2]$$

(4)

Ex Uppg. Två fyrkantiga slingor metalltråd (sidor 4a, 20a)
Beräkna ömsesidig induktans.



Ömsesidig induktans:

$$L_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (= L_{21})$$

Magnetiskt flöde:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \left(= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)$$

Magnetiskt fält (alt. vektorpotential) kring rak tråd L med ström I enligt Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dl' = \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \hat{r} r + \hat{z} z \\ \vec{r}' = \hat{z} z' \\ \vec{i} = I \hat{z} \\ L : \{ -L/2 < z' < L/2 \} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{+\hat{\varphi} r \, dz'}{(r^2 + (z-z')^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = z - z' \\ dt = -dz' \\ L/2 \to z - L/2 \\ -L/2 \to z + L/2 \end{array} ; \begin{array}{c} \text{BETA} \\ 171 \\ \text{s.160} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-\hat{\varphi} r \cdot t}{r^2 \sqrt{r^2 + t^2}} \right]_{z+L/2}^{z-L/2} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{z + L/2}{\sqrt{r^2 + (z+L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{r^2 + (z-L/2)^2}} \right) \quad [T]$$

alt.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\hat{z} I \, dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = z - z' \\ \text{BETA } 89 \\ \text{s.159} \end{array} \right\} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\ln \left| t + \sqrt{t^2 + r^2} \right| \right]_{z+L/2}^{z-L/2}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\ln \left| z + \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + (z + \tfrac{L}{2})^2} \right| - \ln \left| z - \frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + (z - \tfrac{L}{2})^2} \right| \right) \quad [Wb/m]$$

→ Båda är svåra att integrera! (Inga problem med dator)

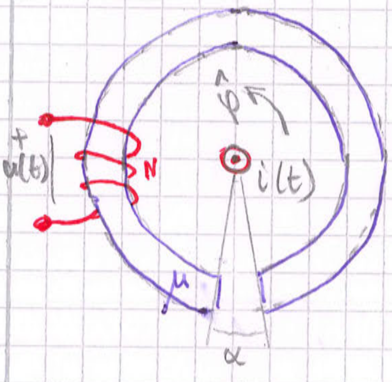
- Approximerar 4a slingan som mycket liten. Då är $\vec{B} \approx$ konstant i slingan → Vi slipper integrera!
- $\vec{B}$-fält från L=20a vid z=0 och r=10a:

$$\rightarrow \vec{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi (10a)} \left(\frac{10a}{\sqrt{(10a)^2 + (10a)^2}} - \frac{-10a}{\sqrt{(10a)^2 + (10a)^2}} \right) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi \cdot 10a} \quad [T]$$

- Den stora slingan ger fyra sådana bidrag.

$$\rightarrow \Phi_{12} \simeq 4 \cdot |\vec{B}| \cdot A = \frac{16\sqrt{2} \mu_0 I_1 a}{10\pi} \; [Wb] \rightarrow L_{12} = \frac{16 \mu_0 a}{5\sqrt{2}\pi} \; [H]$$

(5) Tångamperemeter mäter växelströmmen $i(t)=I_0\cos(\omega t)$ som flyter i en rak ledare enligt figur.



Magnetiskt material μ i ring ($a<r<b$), gap från liten vinkel α. Tjocklek h.

Uttryck I_0 som en funktion av effektivvärdet av $u(t)$.

Frekvensen är låg → kvasistationärt.

Faraday/Lenz lag ger: $u(t) = -N\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ över spolen.

Amperes lag ger $\vec{B}$ kring ström $i(t)$:

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{inne}$$

Symmetri ger $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi$, Men vad händer vid gapet?

Randvillkor vid luftgap: $\hat{n}_2\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}\cdot(\mu_0 \vec{H}_{luft} - \mu \vec{H}_{ring}) = 0$$

Sätt in i Ampere:

$$\Rightarrow \mu_0 H_{\varphi,luft} = \mu H_{\varphi,ring} = \mu H_\varphi$$

$$\int_0^{2\pi-\alpha} \hat{\varphi} H_\varphi \cdot \hat{\varphi} r\,d\varphi + \int_0^{\alpha} \hat{\varphi} H_{\varphi,luft}\cdot\hat{\varphi} r\,d\varphi = I_0\cos(\omega t);\ a<r<b$$

$$\Rightarrow (2\pi-\alpha) r H_\varphi + \alpha r \frac{\mu}{\mu_0} H_\varphi = \left(2\pi + \alpha(\mu_r - 1)\right) r H_\varphi = I_0\cos(\omega t)$$

Alltså: $\vec{H}(r) = \hat{\varphi}\, I_0\cos(\omega t) / (2\pi+\alpha(\mu_r-1))r$ i ringen.

Beräknar: $\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu\dfrac{I_0\cos(\omega t)}{(2\pi+\alpha(\mu_r-1))}\cdot h\cdot \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Vi får nu: $u(t) = \mu\dfrac{N I_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi+\alpha(\mu_r-1)} h \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Effektivvärde ur

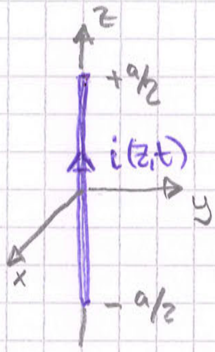
$$\langle u\rangle = \left(\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

Vi har toppvärdet! → Dela med $\sqrt{2}$.

Vi får strömmen: (toppvärdet)

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}\left(2\pi+\alpha(\mu_r-1)\right)\langle u\rangle}{\mu N \omega h \ln(b/a)} \quad [A]$$

⑥



Tunn dipolantenn har strömmen

$$i(z,t) = I_0 \cos(\pi z/a)\cos(\omega t)$$

Beräkna linjeladdningstätheten $\rho_\ell(z,t)$ längs med tråden.

Tidsharmonisk ström: $i(z,t) \rightarrow \mathring{i}(z) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$

Laddning och strömtäthet är relaterade enligt kontinuitetsekvationen:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\mathring{J}} + j\omega \rho_v = 0$$

Vi har enbart linjeladdning och ström:

$$\vec{\mathring{i}} = \hat{z}\,\mathring{i}(z)$$

$$\rho_\ell = \rho_\ell(z)$$

Reducera till 1D kontinuitetsekvation:

$$\nabla \cdot (\vec{\mathring{i}}) + j\omega \rho_\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathring{i}}{\partial z} + j\omega \rho_\ell = 0$$

$$\Rightarrow -I_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) + j\omega \rho_\ell = 0$$

Alltså: $\rho_\ell(z) = \frac{I_0 \pi}{j a \omega} \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)$

I tidsdomän:

$$\rho_\ell(z,t) = \mathrm{Re}\{\rho_\ell(z) \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{"}\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\text{"}}\} = \underline{\frac{I_0 \pi}{a\omega} \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin(\omega t)} \quad [C/m]$$