Tentamen i Elektromagnetiska fält

2013-04-05, kl 08.30-12.30, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 09.30 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2013-04-05 kl 12.30
Granskning	2013-04-23 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

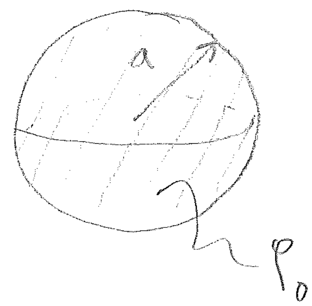
1. Utgå från Maxwells ekvationer i komplex form,

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -j\omega \vec{\boldsymbol{B}}, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}} + j\omega \vec{\boldsymbol{D}}, \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0.$$

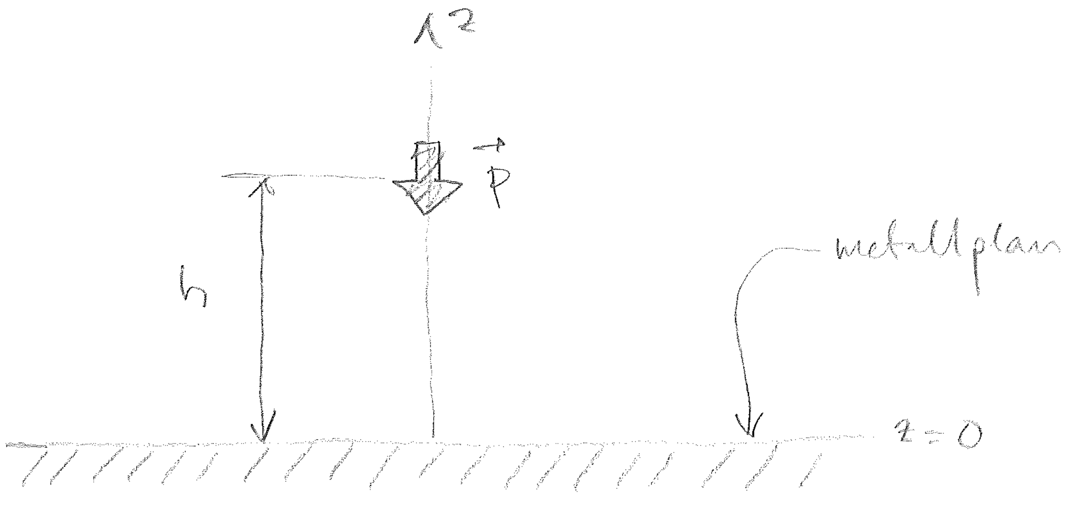
Härled ett uttryck för utbredningskonstanten γ för en s.k. plan våg, som utbreder sig i ett material karakteriserat av ε, μ och σ! Ansätt därefter $\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{x}E_0 e^{-\gamma z}$ och härled uttrycket för vågimpedansen Z för denna våg!

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

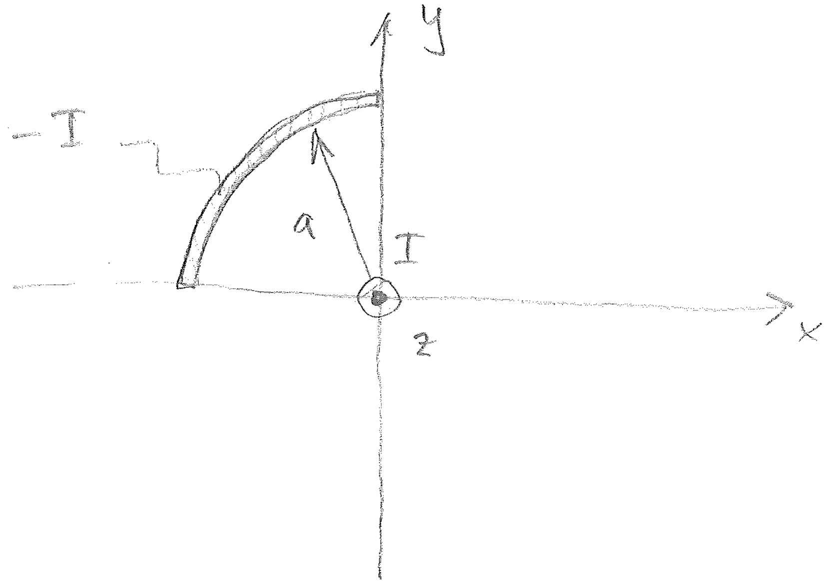
2. I ett klotformat område med radien a finns en konstant rymdladdningstäthet ρ_0. Beräkna den elektriska potentialen överallt!



3. En oändligt stor metallskiva sammanfaller med planet $z = 0$. En elektrisk dipol är placerad på z-axeln i punkten $z = h > 0$ och dess dipolmoment är givet av $\vec{p} = -\hat{z}p_0$. Beräkna den inducerade ytladdning på metallskivan och uttryck rumsberoendet endast med hjälp av avståndet till origo.



4. Ett oändligt långt metallband har formats så att dess tvärsnitt blir en kvartscirkel med radien a enligt figuren nedan. Metallbandet för den totala likströmmen I i negativ z-riktning. Beräkna den magnetiska kraften per längdenhet på en tunn metalltråd som sammanfaller med z-axeln och fungerar som återledare genom att föra strömmen I i positiv z-riktning.

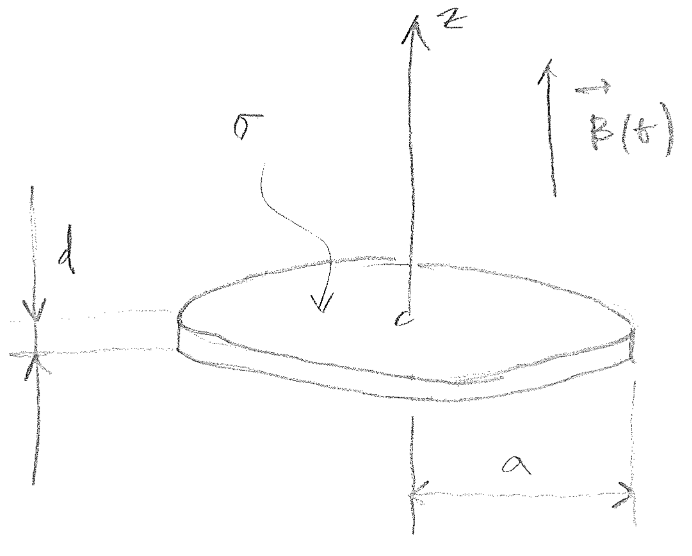


5. En tunn cirkulär metallskiva placeras med sin symmetriaxel längs z-axeln i ett i tiden sinusformigt varierande homogent magnetfält

$$\vec{B}(t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t)$$

Skivan har ledningsförmågan σ, radien a och tjockleken d. Beräkna medeleffektutvecklingen i skivan! Antag att magnetfältet från de inducerade virvelströmmarna kan försummas vid beräkningen!

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



6. Två oändligt stora metallskivor sammanfaller med planen $x = 0$ och $x = L$. I området mellan skivorna kan det elektriska fältet i frekvensplanet skrivas på formen

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{z}\boldsymbol{E}_0(e^{-jkx} + \xi e^{+jkx})$$

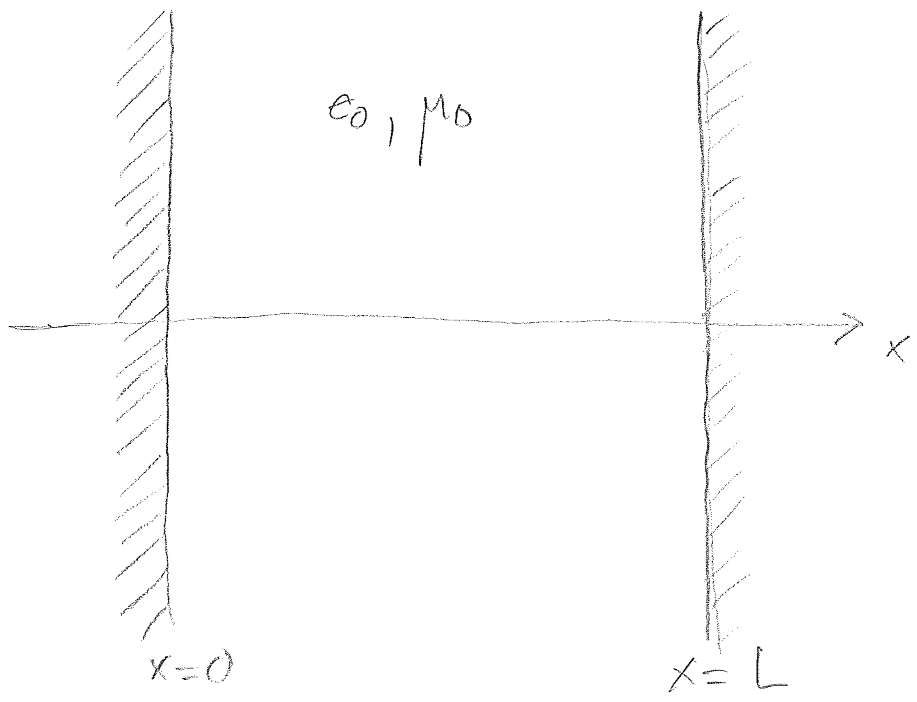
där $\boldsymbol{E}_0$ är en känd konstant. I området mellan plattorna är permittiviteten ϵ_0 och permeabiliteten μ_0.

(a) Beräkna ett värde för konstanten ξ så att randvillkoret för $x = 0$ är uppfyllt.

(b) Beräkna de vågtal k som gör att randvillkoret för $x = L$ är uppfyllt.

(c) Beräkna de vinkelfrekvenser ω som beskriver det elektriska fältets tidsvariation, baserat på resultaten från (a) och (b), genom att använda Helmholtz ekvation

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{\boldsymbol{E}}$$



EEM015 – ELEKTROMAGNETISKA FÄLT – 2013.04.05

(2) $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_{inne}/\varepsilon_0$ och symmetri $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{R}E_R(R)$ ger

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi R^2 E_R(R) = \begin{cases} \dfrac{4\pi R^3}{3\varepsilon_0}\rho_0 & \text{då } R<a \\ \dfrac{4\pi a^3}{3\varepsilon_0}\rho_0 & \text{då } R>a \end{cases}$$

$$E_R(R) = \begin{cases} R\rho_0/3\varepsilon_0 & \text{då } R<a \\ a^3\rho_0/3\varepsilon_0 R^2 & \text{då } R>a \end{cases}$$

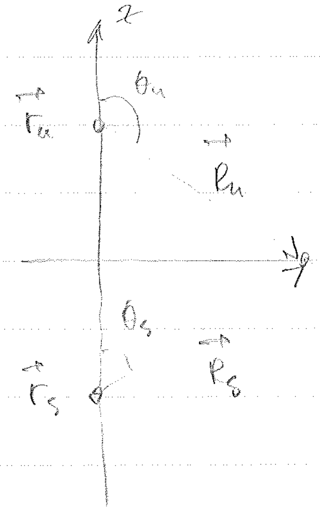
$$V(\vec{r}) = -\int_{L_{\infty\to\vec{r}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_R^\infty \left(\frac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0\xi^2}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right)$$

$$= \frac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\xi}\right]_R^\infty = \frac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0 R} \quad \text{då } R\geq a$$

$$V(\vec{r}) = -\int_{L_{R=a\to\vec{r}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + V(R=a) = -\int_R^a \left(\frac{\xi\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right) + \frac{a^2\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_R^a + \frac{a^2\rho_0}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) \quad \text{då } R\leq a$$

(3) Ursprunglig dipol $\vec{p}_u = \hat{z}(-p_0)$ placerad i punkten $\vec{r}_u = \hat{z}h$ med metallplan som sammanfaller med $z=0$. Spegling gör att metallplanet kan ersättas av speglingskälla $\vec{p}_s = \vec{p}_u$ placerad i punkten $\vec{r}_s = -\hat{z}h$.



För punkt $\vec r = \hat r r$ på planet $z=0$ har man ($\vec R = \vec r - \vec r\,'$)

$$\vec R_u = \hat r r - \hat z h$$
$$\vec R_s = \hat r r + \hat z h$$
$$R = R_u = R_s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Ovanför beräknas $\rho_s = \hat n \cdot \vec D = \varepsilon_0 \hat z \cdot \vec E$ då $z=0$ vilket ger

$$\rho_s = \frac{p}{4\pi R_u^3}\left(\hat z \cdot \hat R_u \, 2\cos\theta_u + \hat z \cdot \hat \theta_u \sin\theta_u\right)$$
$$+ \frac{p}{4\pi R_s^3}\left(\hat z \cdot \hat R_s \, 2\cos\theta_s + \hat z \cdot \hat \theta_s \sin\theta_s\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \hat z \cdot \hat R = \cos\theta, & \hat z \cdot \hat\theta = -\sin\theta \\ \cos\theta_u = -h/R_u, & \sin\theta_u = r/R_u \\ \cos\theta_s = +h/R_s, & \sin\theta_s = r/R_s \end{array}\right\}$$

$$= \frac{2p}{4\pi (r^2+h^2)^{3/2}}\left(2\frac{h^2}{r^2+h^2} - \frac{r^2}{r^2+h^2}\right)$$

$$= \frac{p(2h^2 - r^2)}{2\pi (r^2+h^2)^{5/2}} = \frac{p_0 (r^2 - 2h^2)}{2\pi (r^2+h^2)^{5/2}}$$

(4) Strömförande tråd som sammanfaller med z-axeln ger enligt $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{innesl} = I$ och symm. $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi(r)$

$$2\pi r H_\varphi(r) = I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \hat{\varphi} B_\varphi = \hat{\varphi}\mu_0 H_\varphi = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Metallbandet för ytströmmen $\vec{J}_s = -\hat{z} I/(\pi a/2)$ vilket ger kraften för längden L som

$$\vec{F}_{band} = \int_S (\vec{J}_s ds)\times\vec{B} = \int_{\varphi=\pi/2}^{\pi} \left(-\hat{z}\frac{2I}{\pi a}\right)\times\left(\hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right) \underline{L}\, \underbrace{a\,d\varphi}_{=ds}$$

$$= +\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi^2 a}\int_{\varphi=\pi/2}^{\pi} \hat{r}(\varphi)\, d\varphi = \left\{ \hat{r}(\varphi) = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi^2 a}\left[\hat{x}\sin\varphi - \hat{y}\cos\varphi\right]_{\varphi=\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi^2 a}\left(\hat{x}(0-1) - \hat{y}(-1-0)\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi^2 a}(\hat{y} - \hat{x})$$

Kraft per längdenhet för tråden blir därmed

$$\frac{\vec{F}_{tråd}}{L} = -\frac{\vec{F}_{band}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 a}(\hat{x} - \hat{y})$$

5) Inducerad ström i skivan pga elektriskt fält (symm. $\vec{E} = \hat{\varphi} E_\varphi(r)$) ges av

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \qquad \text{(använd } L = \text{cirkel med radie } r\text{)}$$

$$2\cancel{\pi} r E_\varphi(r) = -j\omega B_0 \cancel{\pi} r^2 \Rightarrow E_\varphi = -j\omega \frac{B_0 r}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -j\frac{\omega B_0 r}{2}\hat{\varphi}$$

Medeleffekten ges av

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\int_V \sigma |\vec{E}|^2 \, dv = \frac{\sigma}{2}\int_{r=0}^{a} \left(\frac{\omega B_0 r}{2}\right)^2 (2\pi r d)\, dr$$

$$= \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 \pi d}{4}\int_{r=0}^{a} r^3 \, dr = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 \pi d a^4}{16}$$

6) På metall gäller att $\hat{n}\times\vec{E} = \vec{0}$ vilket ger $\hat{x}\times\left(\hat{z}E_0(1+\xi)\right) = \vec{0}$ då $x=0$ och därmed är $\xi = -1$. Motsvarande randvillkor för $x=L$ ger

$$-\hat{x}\times\left(\hat{z}E_0\left(e^{-jkL} - e^{+jkL}\right)\right) = \vec{0}$$

$$= -2j\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

$$\Rightarrow k_n = n\pi/L \quad \text{där } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Till sist är $\nabla\times\nabla\times\left(\hat{z}E_z(x)\right) = -\hat{z}\frac{d^2E_z(x)}{dx^2}$ vilket ger

$$-\hat{z}\frac{d^2E_z(x)}{dx^2} = \hat{z}k_n^2 E_z = \omega_n^2\mu_0\epsilon_0\hat{z}E_z \Rightarrow \omega_n = \frac{k_n}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{n\pi}{L\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$