Tentamen i Elektromagnetiska fält

2012-12-22, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 15.15 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2012-12-22 kl 18.15
Granskning	2013-01-15 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

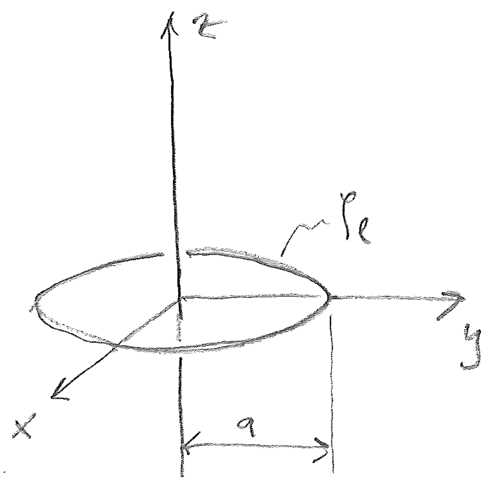
1. Definiera den makroskopiska strömtätheten $\vec{J}_\text{v}(\vec{r})$. Härled ur den elektriska laddningens oförstörbarhet den s.k. kontinuitetsekvationen $\nabla \cdot \vec{J}_\text{v}(\vec{r}) = -\partial \rho_\text{v}(\vec{r})/\partial t$.

Räkneuppgifter:

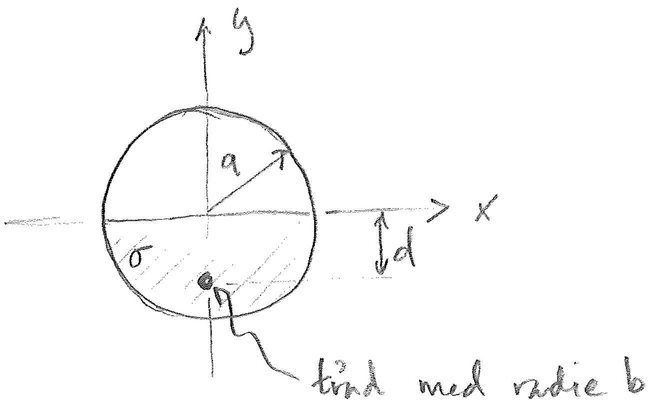
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En linjeladdning med den konstanta laddningstätheten ρ_l är formad som en cirkel med radien a. Cirkelns mittpunkt sammanfaller med origo och linjeladdningen ligger i planet $z = 0$ enligt figuren. Beräkna det elektriska fältet längs z-axeln.

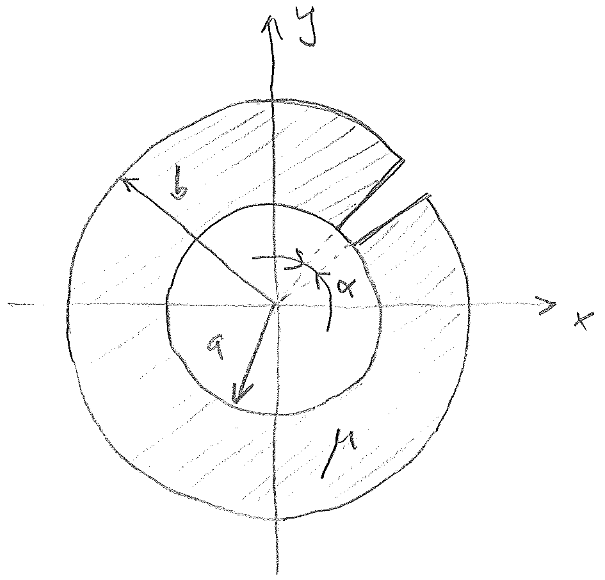
   Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



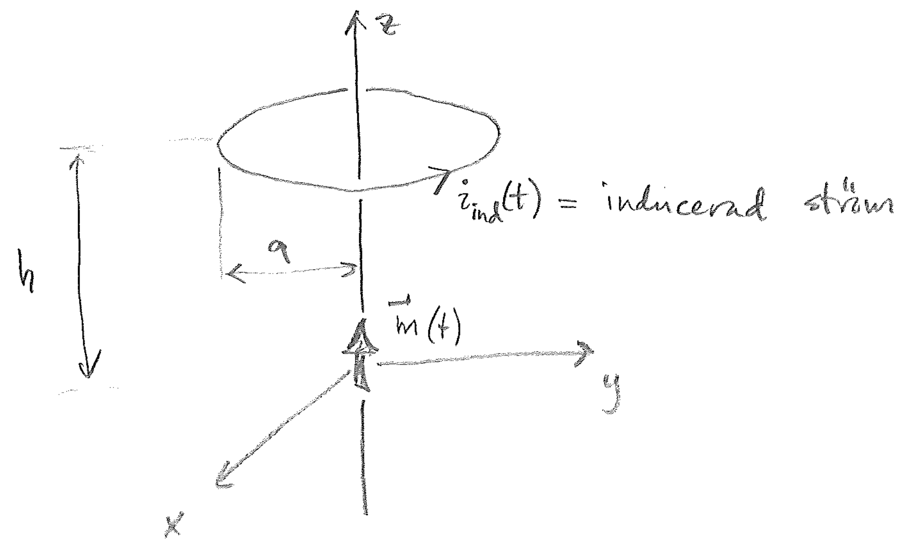
3. Ett metallrör med radien a är till hälften fyllt med en ledande vätska med konduktiviteten σ enligt figuren. Parallellt med rörets axel löper en tunn metalltråd med radien b så som visas i figuren. Beräkna ~~resistansen~~ konduktansen per längdenhet mellan tråden och röret.



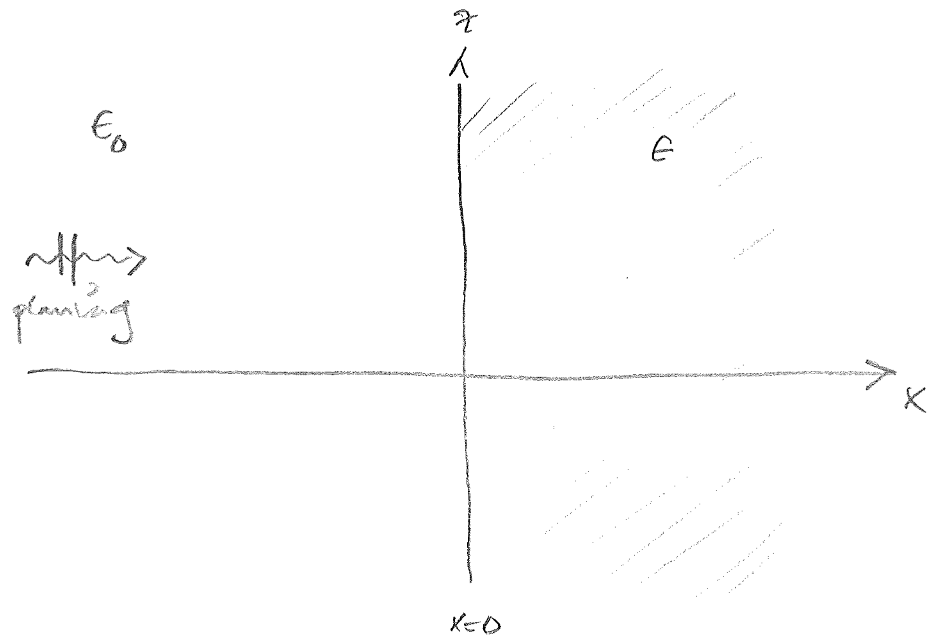
4. En ledande tråd med radien a för likströmmen I. Ledaren omsluts av ett järnrör med innerradie a, ytterradie b, längd L och den konstanta permeabiliteten $\mu = \mu_0\mu_r$ där $\mu_r \gg 1$. (Järnröret är elektriskt isolerat från tråden.) Järnröret är uppsågat så att man får ett kilformat tunt luftgap som upptar en liten vinkel α. Beräkna det magnetiska flödet Φ genom luftgapet. (Läckning kan försummas vilket innebär att det magnetiska fältet endast har en φ-komponent.)



5. En liten spole är placerad i origo och den för växelströmmen $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ vilket ger ett magnetiskt dipolmoment $\vec{m}(t) = \hat{z} N A\, i(t)$, där N är antalet varv i spolen och A är dess tvärsnittsarea. Frekvensen är mycket låg vilket medför att det går bra att anta kvasistationära fält. Beräkna den inducerade strömmen i en cirkulär trådslinga med radien a. Trådslingan ligger i planet $z = h$ och dess origo sammanfaller med z-axeln. Trådslingan har resistansen R och dess självinduktans kan försummas.

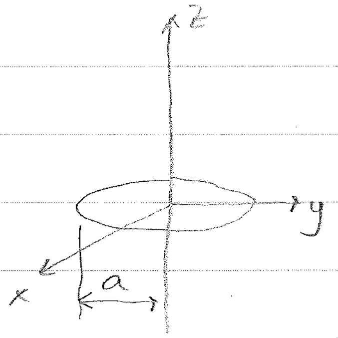


6. En plan våg propagerar i luft i positiv x-riktning. Vid $x = 0$ reflekteras vågen mot en plan gränsyta mellan luften och ett dielektriskt material med permittiviteten $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$, där ϵ_r är konstant. Det dielektriska materialet upptar området $x > 0$. Beräkna hur stor del av planvågens effekt som transmitteras in i det dielektriska materialet.



Elektromagnetiska fält för E2 - 2012.12.22

(2)



$$\vec{r} = \hat{z} z$$

$$\vec{r}\,' = \hat{r}(\varphi')a = \hat{x} a\cos\varphi' + \hat{y} a \sin\varphi'$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -\hat{x} a\cos\varphi' - \hat{y} a\sin\varphi' + \hat{z} z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{a^2 + z^2}$$

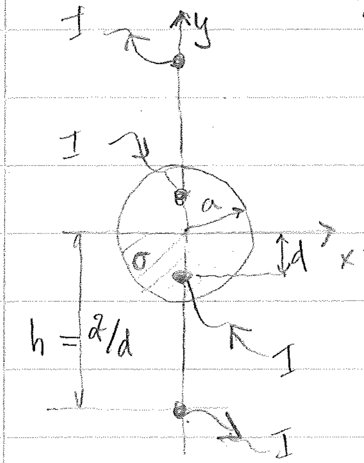
$$dl' = a\,d\varphi'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\rho_e}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dl' = \left\{\begin{matrix}\text{Symmetri}\\ \Rightarrow \vec{E} = \hat{z}E_z(z)\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\rho_e \hat{z} z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,a\,d\varphi'$$

$$= \hat{z}\frac{\rho_e a z}{2\epsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

(3)



Spegling : $d = a^2/h \Rightarrow h = a^2/d$

$$V_{\text{tråd}} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2/d - d}{b}\cdot\frac{a^2/d + d}{2d}\right)$$

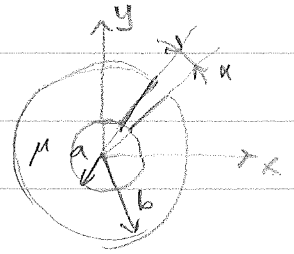
$$V_{\text{rör}} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2/d - a}{a-d}\cdot\frac{a^2/d + a}{a+d}\right)$$

$$U = V_{\text{tråd}} - V_{\text{rör}} = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2/d - d}{b}\cdot\frac{a^2/d+d}{2d}\cdot\frac{a-d}{a^2/d - a}\cdot\frac{a+d}{a^2/d+a}\right)$$

$$= \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^2-d^2}{bd}\cdot\frac{a^2+d^2}{2d^2}\cdot\frac{d}{a}\cdot\frac{d}{a}\right) = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a^4-d^4}{2a^2bd}\right)$$

$$\frac{G}{L} = \frac{I/U}{L} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{a^4-d^4}{2a^2bd}\right)}$$

(4)



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{omsl} \quad \text{med} \quad \vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi(r)$$

För området $a<r<b$ har man $\vec{H}^{(I)}$ i luftgapet och $\vec{H}^{(II)}$ i järnet.

$$\Rightarrow \alpha r H_\varphi^{(I)} + (2\pi - \alpha) r H_\varphi^{(II)} = I \quad \text{då} \quad a<r<b$$

$$\Rightarrow \alpha r \frac{B_\varphi^{(I)}}{\mu_0} + (2\pi-\alpha) r \frac{B_\varphi^{(II)}}{\mu_0\mu_r} = I$$

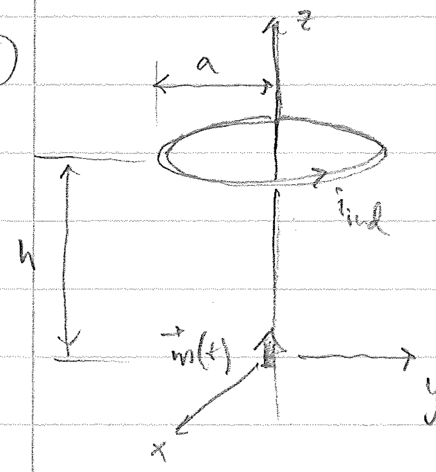
Där $\hat{n}^{(II)}\cdot\left(\vec{B}^{(I)} - \vec{B}^{(II)}\right) = 0 \Rightarrow B_\varphi^{(I)} = B_\varphi^{(II)} (= B_\varphi)$ vilket ger

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{\left(\alpha + \frac{2\pi-\alpha}{\mu_r}\right) r}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{r=a}^{b} \left(\hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{\left(\alpha + \frac{2\pi-\alpha}{\mu_r}\right) r}\right)\cdot\left(\hat{\varphi} L\, dr\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I L}{\alpha + (2\pi-\alpha)/\mu_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\mu_0\mu_r I L}{(\mu_r - 1)\alpha + 2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(5)



$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 N A i_0 \cos(\omega t)}{4\pi R^3}\left(\hat{R}\, 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},\omega) = \frac{\mu_0 N A i_0}{4\pi R^3}\left(\hat{R}\, 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \left\{ \begin{array}{l} S = \text{del av sfär med } R = \sqrt{a^2+h^2} \\ \text{och } \theta < \theta_{tråd} = \arctan(a/h) \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta_{tråd}} \left[\frac{\mu_0 N A i_0}{4\pi R^3} \left(\hat{R} 2\cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta \right) \right] \cdot \left(\hat{R}\, 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta \right)$$

$$= \frac{\mu_0 N A i_0}{\sqrt{a^2+h^2}} \int_{\theta=0}^{\theta_{tråd}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Subs. } \xi = \cos\theta \Rightarrow d\xi = -\sin\theta \, d\theta \\ \xi_{tråd} = \cos\theta_{tråd} = h / \sqrt{a^2+h^2} \\ \xi_0 = \cos(0) = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 N A i_0}{\sqrt{a^2+h^2}} \int_{h/\sqrt{a^2+h^2}}^{1} \xi \, d\xi = \frac{\mu_0 N A i_0}{2\sqrt{a^2+h^2}} \left(1 - \frac{h^2}{a^2+h^2} \right)$$

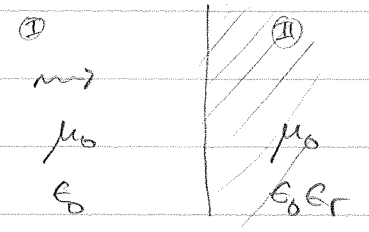
$$= \frac{\mu_0 N A i_0}{2\sqrt{a^2+h^2}} \frac{a^2}{a^2+h^2} = \frac{\mu_0 N A i_0 a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{V} = -j\omega \Phi = -\frac{j\omega \mu_0 N A i_0 a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\mathring{I}_{ind} = \frac{\mathcal{V}}{R} = -\frac{j\omega \mu_0 N A i_0 a^2}{2R(a^2+h^2)^{3/2}}$$

$$i_{ind}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathring{I}_{ind} e^{j\omega t} \right\} = \frac{\omega \mu_0 N A i_0 a^2}{2R(a^2+h^2)^{3/2}} \sin(\omega t)$$

(6)



Transmissionskoefficienten är

$$\mathbb{T} = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_{II}}{\eta_{II} + \eta_{I}}$$

$$= \left\{ \eta_{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ \& \ \eta_{II} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_r}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_r} + \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} = \frac{2/\sqrt{\varepsilon_r}}{1/\sqrt{\varepsilon_r} + 1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}$$

Poyntingvektor för den infallande vågen

$$\vec{S}^i = \vec{E}^i \times (\vec{H}^i)^* = \hat{x} \frac{|E_0^i|^2}{\eta_{I}}$$

och motsvarande för den transmitterade vågen

$$\vec{S}^t = \vec{E}^t \times (\vec{H}^t)^* = \hat{x} \frac{|E_0^t|^2}{\eta_{II}}$$

Därför får vi kvoten

$$\frac{|\vec{S}^t|}{|\vec{S}^i|} = \frac{|E_0^t|^2/\eta_{II}}{|E_0^i|^2/\eta_{I}} = |\mathbb{T}|^2 \frac{\eta_{I}}{\eta_{II}} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_r}}{(1+\sqrt{\varepsilon_r})^2}$$