Tentamen i Elektromagnetiska fält

2012-04-12, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås på kursens hemsida 2012-04-12 kl 18.00
Granskning	2012-04-26 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

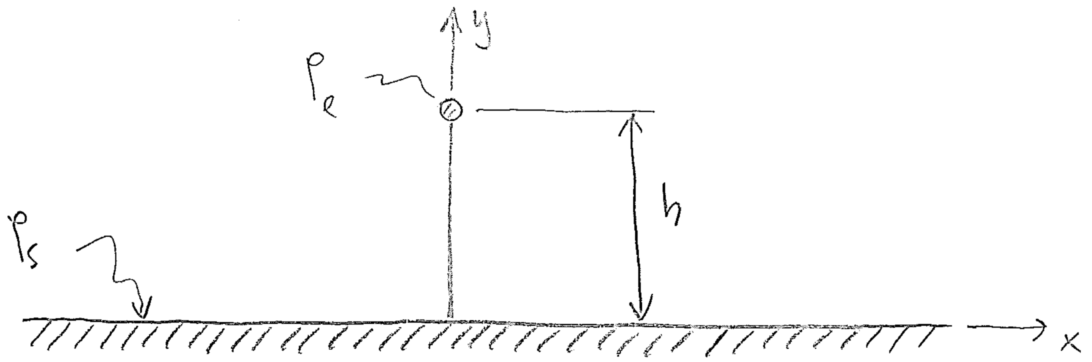
OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

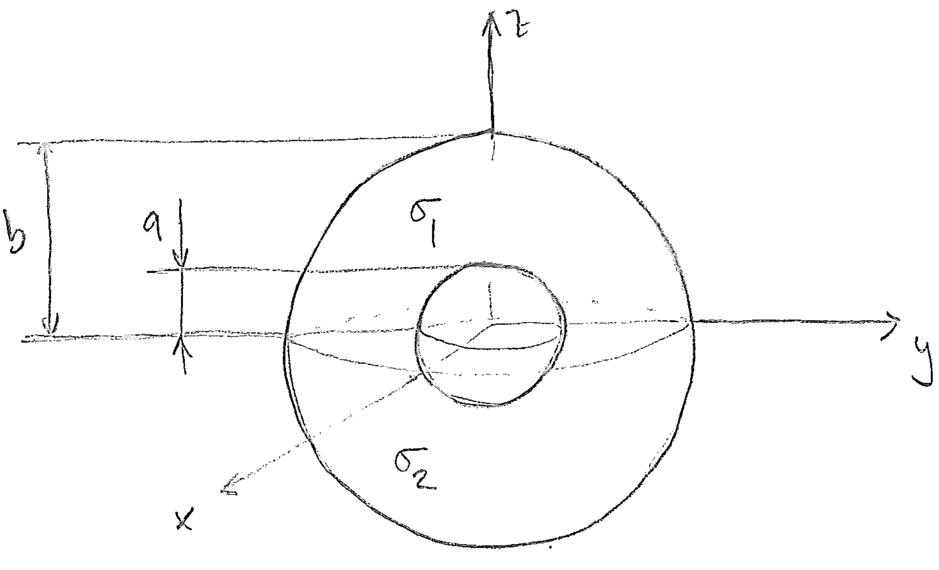
1. Utgå från $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ och $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{v}}$. Härled sambanden mellan tangentialkomponenterna av $\vec{E}$ och mellan normalkomponenterna av $\vec{D}$ på ömse sidor om en gränsyta mellan två olika material.

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

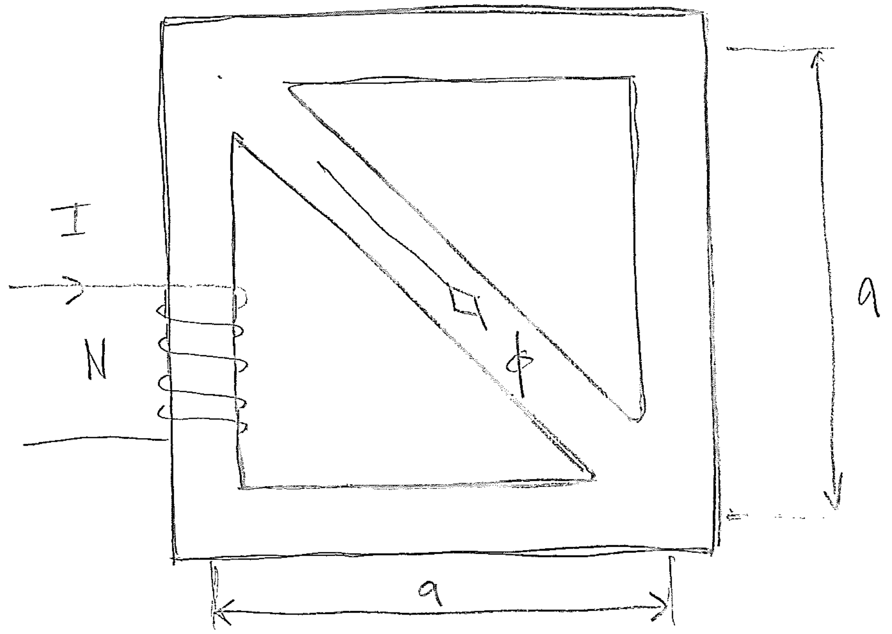
2. En oändligt lång rak tråd med linjeladdningstätheten ρ_{l} befinner sig på höjden h ovanför ett jordplan. Beräkna den inducerade ytladdningstätheten ρ_{s} på jordplanet.



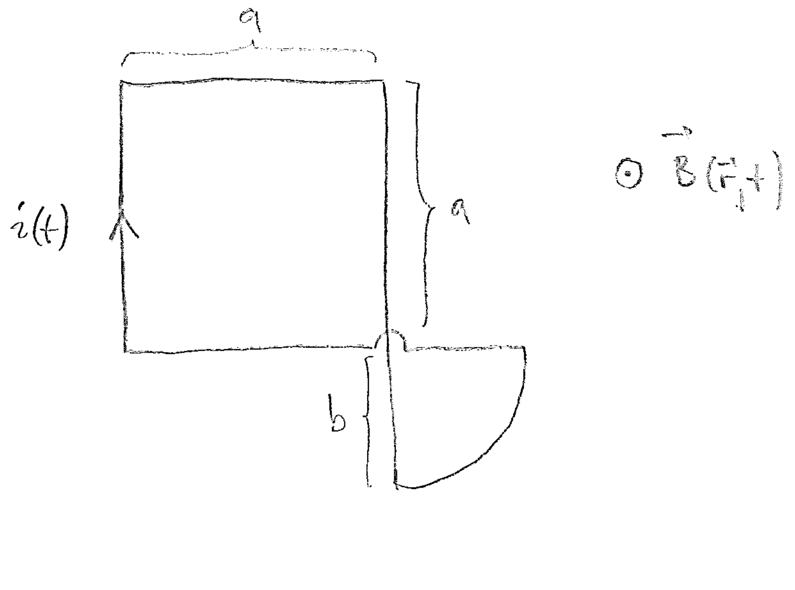
3. Figuren nedan visar en metallsfär med radien a placerad inuti en större metallsfär med radien b. I den övre halvan av området mellan metallsfärer ($z > 0$) finns ett ledande material med konduktiviteten σ_1 och i den undre halvan ($z < 0$) ett annat ledande material med konduktiviteten σ_2. Beräkna resistansen R mellan de två metallsfärerna.



4. En magnetisk krets består av en järnkärna formad som en kvadrat med en diagonal brygga så som figuren visar. (Alla delar i den magnetiska kretsen har samma tvärsnittsarea A och permeabilitet $\mu \gg \mu_0$.) Längs en av järnkärnans yttersidor finns en lindning med N varv som för likströmmen I. Beräkna det magnetiska flödet genom den diagonala bryggan.



5. En ledande tråd med resistansen R är formad så som figuren visar. Vinkelrätt mot det plan som tråden ligger i finns ett magnetfält $\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{z}B_0\cos(\omega t)$. Beräkna den inducerade strömmen i tråden då frekvensen ω är så låg att problemet kan anses vara kvasistationärt.

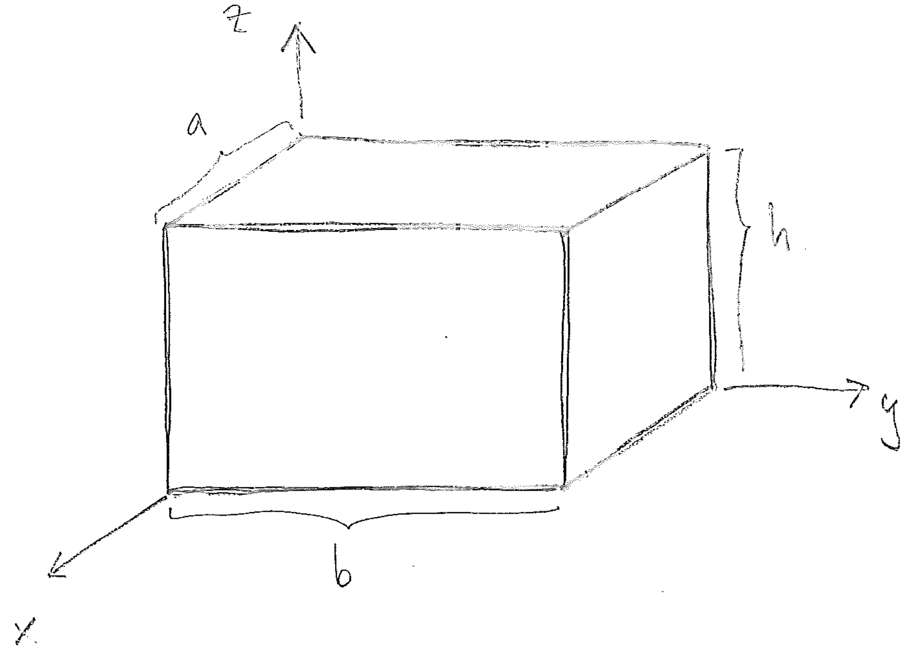


6. Det elektromagnetiska fältet

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{z}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t)$$

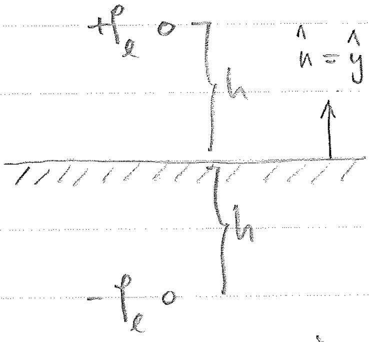
finns i en rätblocksformad metallkavitet med sidorna a och b. Kaviteten har höjden h och är fylld med luft. Bestäm frekvensen ω så att vågekvationen för det elektriska fältet är uppfylld. Vågekvationen för detta fall är

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$



ELEKTROMAGNETISKA FÄLT 2012-04-12

(2)



(speglingsladdning)

$$\vec{r} = \hat{x}x \ , \quad \vec{r}\,'_{\oplus} = \hat{y}h \ , \quad \vec{r}\,'_{\ominus} = -\hat{y}h$$

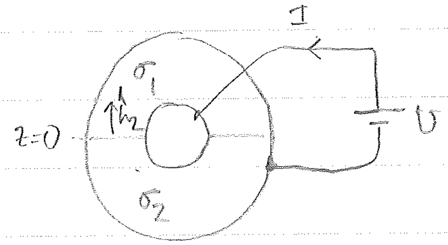
$$\vec{r} - \vec{r}\,'_{\oplus} = \hat{x}x - \hat{y}h$$
$$\vec{r} - \vec{r}\,'_{\ominus} = \hat{x}x + \hat{y}h \ .$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'_{\oplus}|} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'_{\oplus}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'_{\oplus}|} + \frac{-\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'_{\ominus}|} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'_{\ominus}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'_{\ominus}|}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{x}x - \hat{y}h}{x^2 + h^2} - \frac{\hat{x}x + \hat{y}h}{x^2 + h^2} \right] = -\hat{y} \frac{\rho_\ell h}{\pi\epsilon_0 (x^2 + h^2)}$$

$$\rho_s = \hat{n} \cdot \vec{D} = \hat{y} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = -\frac{\rho_\ell h}{\pi (x^2 + h^2)}$$

(3)



Strömmen flyter i radiell riktn.

$$\vec{J}_1 = \hat{R} \frac{2 I_1}{4\pi R^2} \ , \quad \vec{J}_2 = \hat{R} \frac{2 I_2}{4\pi R^2}$$

Motsvarande elektriskt fält är

$$\vec{E}_1 = \hat{R} \frac{I_1/\sigma_1}{2\pi R^2} \ , \quad \vec{E}_2 = \hat{R} \frac{I_2/\sigma_2}{2\pi R^2}$$

vilket måste uppfylla randvillkoret $\hat{n}_2 \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$ då $z = 0$. Randvillkoret ger $I_1/\sigma_1 = I_2/\sigma_2$ $(= \psi)$

$$U = -\int_{R=a}^{b} \left(\hat{R} \frac{\psi}{2\pi R^2} \right) \cdot (-\hat{R}\, dR) = \frac{\psi}{2\pi} \left[\frac{-1}{R} \right]_{R=a}^{b} = \frac{\psi}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Alltså har vi att

$$U = \frac{I_1/\sigma_1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{I_2/\sigma_2}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

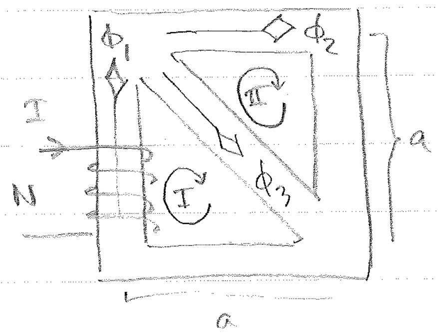
Den totala strömmen blir därmed

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi\sigma_1 U}{1/a - 1/b} + \frac{2\pi\sigma_2 U}{1/a - 1/b}$$

vilket ger resistansen

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1/a - 1/b}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

(4)



$$\phi_i = \int_S \vec{B}_i \cdot d\vec{s} = B_i A = \mu H_i A$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$\Rightarrow H_1 = H_2 + H_3 \quad (i)$$

(I) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{omsl} \Rightarrow H_1 \cdot 2a + H_3 \cdot \sqrt{2}a = NI \quad (ii)$

(II) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{omsl} \Rightarrow H_2 \cdot 2a - H_3 \cdot \sqrt{2}a = 0 \quad (iii)$

Lös ut H_3 ur ekv. (i) - (iii)

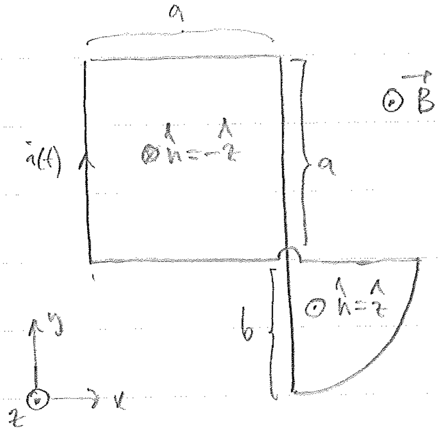
$(iii) \Rightarrow 2H_2 = \sqrt{2}H_3$, $(i)\,\&\,(ii) \Rightarrow (H_2 + H_3)2a + H_3\sqrt{2}a = NI$

$\Rightarrow 2H_2 + 2H_3 + \sqrt{2}H_3 = NI/a \Rightarrow \sqrt{2}H_3 + 2H_3 + \sqrt{2}H_3 =$

$= 2(1+\sqrt{2})H_3 = NI/a$

$$\therefore H_3 = \frac{NI}{2(1+\sqrt{2})a} \Rightarrow \phi_3 = \frac{\mu A NI}{2(1+\sqrt{2})a}$$

(5)



$\odot \vec{B}(\vec{r},t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{\mathbb{B}} = \hat{z} B_0$

$$\Phi = \int_S \vec{\mathbb{B}} \cdot d\vec{s} = (\hat{z} B_0) \cdot (-\hat{z} a^2) + (\hat{z} B_0) \cdot \left(\hat{z} \frac{\pi b^2}{4}\right)$$

$$= B_0 \left(\frac{\pi b^2}{4} - a^2\right)$$

$$\mathbb{V} = -j\omega \Phi = -j\omega B_0 \left(\frac{\pi b^2}{4} - a^2\right)$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{R} = -\frac{j\omega B_0}{R} \left(\frac{\pi b^2}{4} - a^2\right)$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbb{I} e^{j\omega t}\right\} = \frac{\omega B_0}{R} \left(\frac{\pi b^2}{4} - a^2\right) \sin(\omega t)$$

(6)

$$\vec{\mathbb{E}} = \hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \mathbb{E}_z \end{vmatrix} = \hat{x} \partial_y \mathbb{E}_z - \hat{y} \partial_x \mathbb{E}_z$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbb{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_y \mathbb{E}_z & -\partial_x \mathbb{E}_z & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \left(-\partial_x^2 \mathbb{E}_z - \partial_y^2 \mathbb{E}_z\right)$$

$$= \hat{z} \underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}_{= \mu_0 \epsilon_0 \omega^2} \underbrace{E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}_{= \mathbb{E}_z}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2}{\mu_0 \epsilon_0}}$$