Tentamen i Elektromagnetiska fält

2011-08-16, kl 08.30-12.30, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 09.15 och 11.15
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2011-08-16 kl 12.30
Granskning	2011-08-29 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

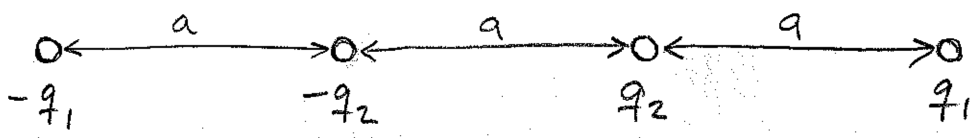
OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

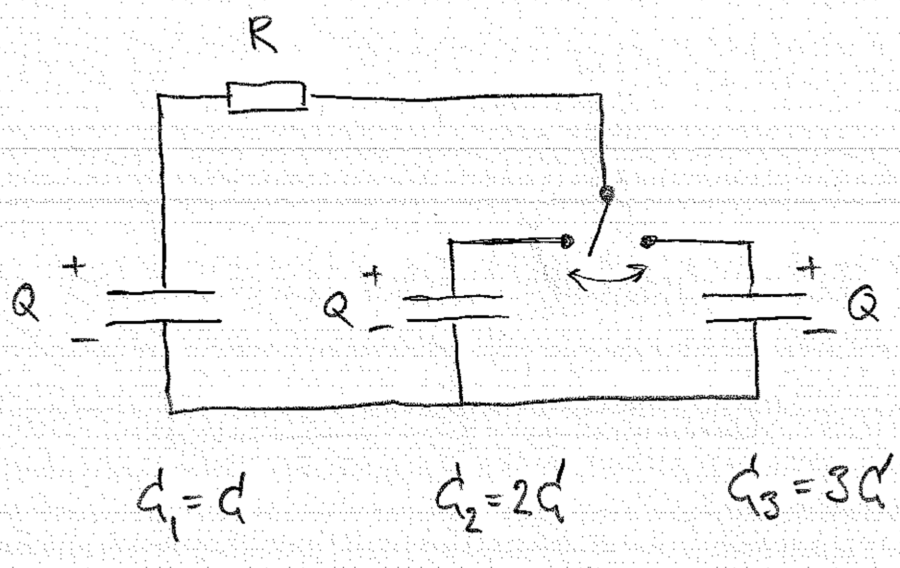
1. Definiera den makroskopiska strömtätheten $\vec{J}_v(\vec{r})$. Härled ur den elektriska laddningens oförstörbarhet den s.k. kontinuitetsekvationen $\nabla \cdot \vec{J}_v(\vec{r}) = -\partial\rho_v(\vec{r})/\partial t$.

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. Fyra tunna, långa, raka och parallella ledare är uppladdade enligt figuren nedan. Längden på de ledande trådarna är L och de har radien b. Avståndet mellan två intilliggande trådar är a så som visas i figuren. Beräkna spänningen mellan den ledare som befinner sig längs till höger och den som befinner sig längst till vänster.

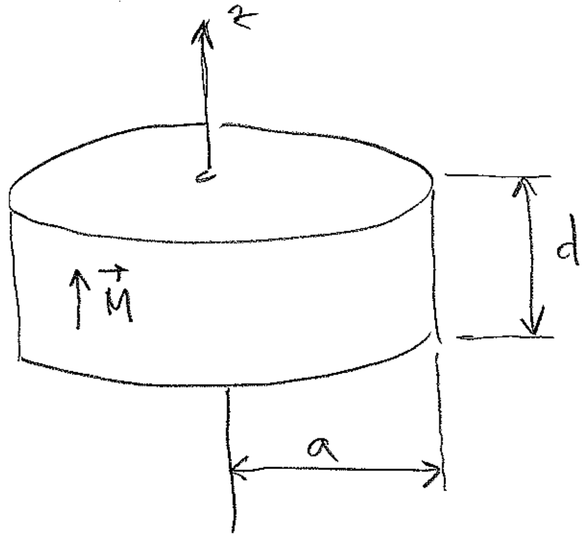


3. Tre kondensatorer är från början laddade så att de var och en har laddningen $\pm Q$ enligt figuren nedan. Först kopplas $C_1 = C$ till $C_3 = 3C$ med en strömbrytare så att ett nytt stationärtillstånd uppnås. Efter detta slås strömbrytaren om så att $C_1 = C$ kopplas till $C_2 = 2C$ istället och man inväntar ett nytt stationärtillstånd. Beräkna den elektriska energi som utvecklas i resistansen R på grund av omkopplingarna av strömbrytaren.

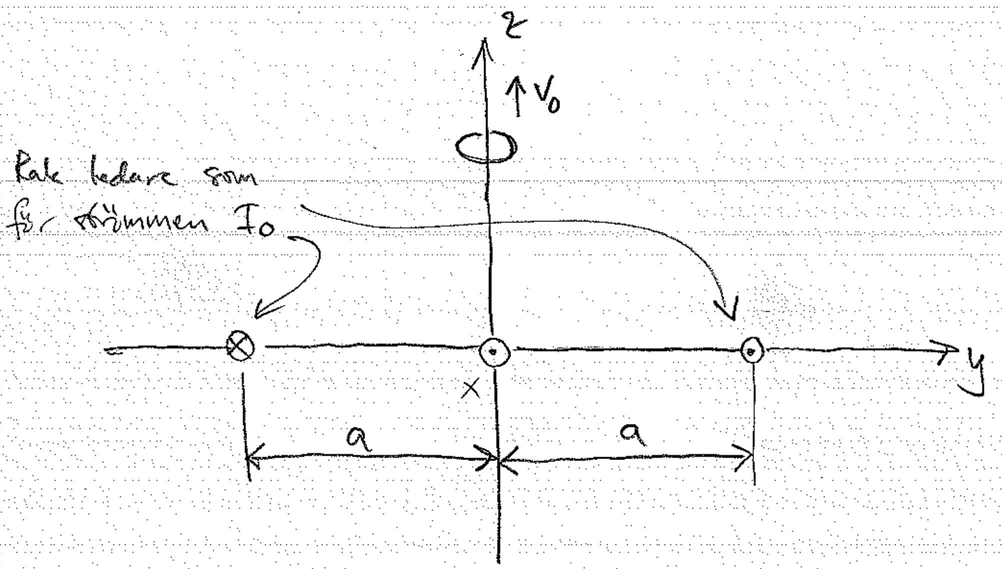


4. Betrakta en cirkulär cylinder med radien a och längden d. Cylindern består av ett magnetiskt material och den är homogent magnetiserad längs cylinderaxeln så att $\vec{M} = \hat{z}M_0$ inuti cylindern. Beräkna den magnetiska flödestätheten i cylinderns mittpunkt.

Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



5. Två raka parallella ledare för strömmen I_0 i motsatt riktning enligt figuren. Ledarna är parallella med x-axeln och passerar genom y-axeln i punkterna $y = \pm a$. En liten cirkulär trådslinga med radien $b \ll a$ och resistansen R flyttas med den konstanta hastigheten v_0 längs z-axeln. Slingas axel sammanfaller med z-axeln. Beräkna kraften på den cirkulära slingan som funktion av z då slingans självinduktans försummas.



6. En cirkulär trådantenn med radien a befinner sig i fri rymd och den för en växelström med amplituden I_0 med vinkelfrekvensen ω. Radien a är liten i förhållande till våglängden, vilket innebär att det elektriska fältet på stort avstånd från antennen approximativt kan skrivas som

$$\vec{E} = \hat{\varphi} Z_0 \frac{(k_0 a)^2 I_0 \sin\theta}{4R} e^{-jk_0 R}$$

i sfäriska koordinater. Här betecknas vågimpedansen i luft av Z_0 och vågtalet i luft av k_0. Beräkna det magnetiska fältet då man befinner sig på stort avstånd från antennen.

ELEKTROMAGNETISKA FÄLT FÖR E2 – 2011.08.16

② Potentialen för ledaren längst till höger är

$$V_{\oplus} = \frac{q_1/L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3a}{b}\right) + \frac{q_2/L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2a}{a}\right)$$

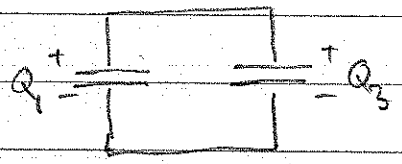
och motsvarande för ledaren längst till vänster är

$$V_{\ominus} = \frac{q_1/L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{3a}\right) + \frac{q_2/L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{2a}\right) \qquad \left[= -V_{\oplus}\right]$$

vilket ger spänningen

$$U = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 L}\left[q_1 \ln\left(\frac{3a}{b}\right) + q_2 \ln(2)\right]$$

③ Då C_1 är kopplad till C_3 och stationär tillståndet har uppnåtts måste följande gälla



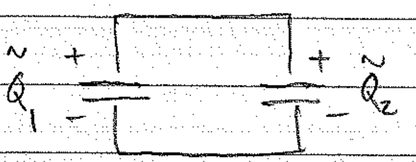
$C_1 = C \qquad C_3 = 3C$

$$\begin{cases} Q_1 + Q_3 = Q + Q = 2Q \\ \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_3}{C_3} \quad \text{(samma spänning)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{C} = \frac{2Q - Q_1}{3C} \Rightarrow 3Q_1 = 2Q - Q_1 \Rightarrow Q_1 = Q/2$$

$$\Rightarrow Q_3 = 3Q/2$$

Då C_1 är kopplad till C_2 fås på motsvarande sätt



$C_1 = C \qquad C_2 = 2C$

$$\begin{cases} \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 = Q/2 + Q = 3Q/2 \\ \dfrac{\tilde{Q}_1}{C_1} = \dfrac{\tilde{Q}_2}{C_2} \end{cases}$$

Redan uppfylld då $Q_1 = Q/2$ & $Q_2 = Q$ och $C_1 = C$ & $C_2 = 2C$
⇒ ingen ström flyter vid denna omkoppling!

Upplagrad energi innan omkopplingarna är

$$W_{Ⓐ} = \frac{1}{2}\left[\frac{Q^2}{C} + \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q^2}{3C}\right] = \frac{Q^2}{2C}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$$

och motsvarande efter omkopplingarna är

$$W_{Ⓑ} = \frac{1}{2}\left[\frac{(Q/2)^2}{C} + \frac{Q^2}{2C} + \frac{(3Q/2)^2}{3C}\right] = \frac{Q^2}{2C}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right]$$

vilket ger den utvecklade energin

$$\Delta W = W_{Ⓐ} - W_{Ⓑ} = \frac{Q^2}{6C}$$

④ De ekvivalenta magnetiska strömtätheterna är

$$\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} = \begin{cases} \vec{0} & \text{på botten} \quad (\hat{n} = -\hat{z}) \\ M_0 \hat{\varphi} & \text{på manteln} \quad (\hat{n} = \hat{r}) \\ \vec{0} & \text{på locket} \quad (\hat{n} = +\hat{z}) \end{cases}$$

Den magnetiska flödestätheten fås genom superposition

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_{mantel}} \frac{\vec{J}_{ms}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, dS'$$

med $\vec{r} = \vec{0}$ och $\vec{r}' = a\hat{r} + z'\hat{z}$ vilket ger

$$\vec{r} - \vec{r}' = -a\hat{r} - z'\hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + (z')^2}$$

$$\vec{J}_{ms} \times (\vec{r} - \vec{r}') = M_0 (a\hat{z} - z'\hat{r})$$

På grund av symmetrin måste $\vec{B} = B_z\hat{z}$, vilket ger superpositionsintegralen

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'=-d/2}^{d/2} \frac{M_0 a \hat{z}}{[a^2 + (z')^2]^{3/2}} \, 2\pi a dz'$$

$$= \mu_0 M_0 \frac{d/2}{\sqrt{a^2 + (d/2)^2}}$$

(5) Kraften ges av $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} = \hat{z} m_z \partial B_z/\partial z$ där $m_z = i_s \pi b^2$ och i_s är den inducerade strömmen i slingan, dvs

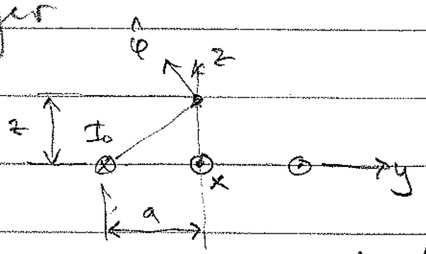
$$i_s = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dz}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_0} = -\frac{v_0}{R}\pi b^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Man får alltså kraften

$$\vec{F} = \hat{z}\, i_s \pi b^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} = \hat{z}\left(-\frac{v_0}{R}\pi b^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\pi b^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$= -\hat{z}\frac{v_0}{R}\left[\pi b^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}\right]^2$$

Magnetisk flödestäthet från rak tråd som för strömmen I_0 ges av $\vec{B} = \hat{\varphi}\, \mu_0 I_0 / 2\pi r$ enligt Ampère's lag och symmetriargument. Superposition och symmetri ger



$$B_z = 2\hat{z}\cdot\left[\hat{\varphi}\,\frac{-\mu_0 I_0}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

$$= -\frac{\cancel{2}a\mu_0 I_0}{\cancel{2}\pi\,(a^2+z^2)}$$

$$\hat{\varphi} = \hat{x}\times\hat{r} = \hat{x}\times\frac{a\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$= \frac{a\hat{z}-z\hat{y}}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

vilket ger

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{a\mu_0 I_0}{\pi}\,\frac{2z}{(a^2+z^2)^2}$$

Kraften blir därmed

$$\vec{F} = -\hat{z}\,\frac{v_0}{R}\left[\frac{2ab^2\mu_0 I_0 z}{(a^2+z^2)^2}\right]^2$$

(16) Enligt Faradays lag har man

$$\vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0} = j\,\frac{1}{\omega\mu_0}\left[\hat{R}\,\frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\varphi\sin\theta\right) - \hat{\theta}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(RE_\varphi\right)\right]$$

där

$$E_\varphi = \overbrace{\eta_0 \frac{(k_0 a)^2 I_0}{4}}^{\xi} \cdot \frac{\sin\theta}{R} e^{-jk_0R}$$

vilket ger

$$\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\varphi \sin\theta\right) = \frac{1}{R\cancel{\sin\theta}}\,\xi\,\frac{2\cancel{\sin\theta}\cos\theta}{R} e^{-jk_0R}$$

$$= 2\xi \frac{\cos\theta}{R^2} e^{-jk_0R}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R E_\varphi\right) = \frac{1}{R}\xi \sin\theta \left(-jk_0\right) e^{-jk_0R}$$

Magnetfältet blir därför

$$\vec{H} = j\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{Z_0 (k_0 a)^2 I_0}{4}\left[\hat{R}\frac{2\cos\theta}{R^2} + \hat{\theta}\frac{jk_0\sin\theta}{R}\right] e^{-jk_0R}$$

$$\underset{R\ \text{stort}}{\approx} -\frac{k_0}{\omega\mu_0}\frac{Z_0 (k_0 a)^2 I_0}{4}\frac{\sin\theta}{R} e^{-jk_0R}\,\hat{\theta}$$

$$= -\frac{(k_0 a)^2 I_0}{4}\frac{\sin\theta}{R} e^{-jk_0R}\,\hat{\theta}$$