Tentamen i Elektromagnetiska fält

2011-04-28, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 17.15
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2011-04-28 kl 18.00
Granskning	2011-05-12 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord.
   (a) Gradienten
   (b) Divergensen
   (c) Rotationen

Räkneuppgifter:

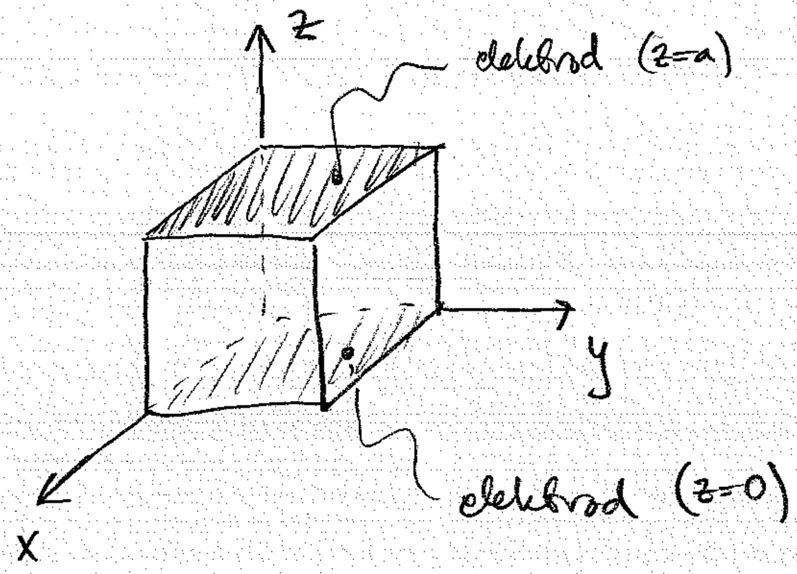
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. Den elektriska volymladdningstätheten ges av

$$\rho_v(x) = \begin{cases} -\rho_0/a & \text{då } -a < x < 0 \\ +\rho_0/b & \text{då } 0 < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

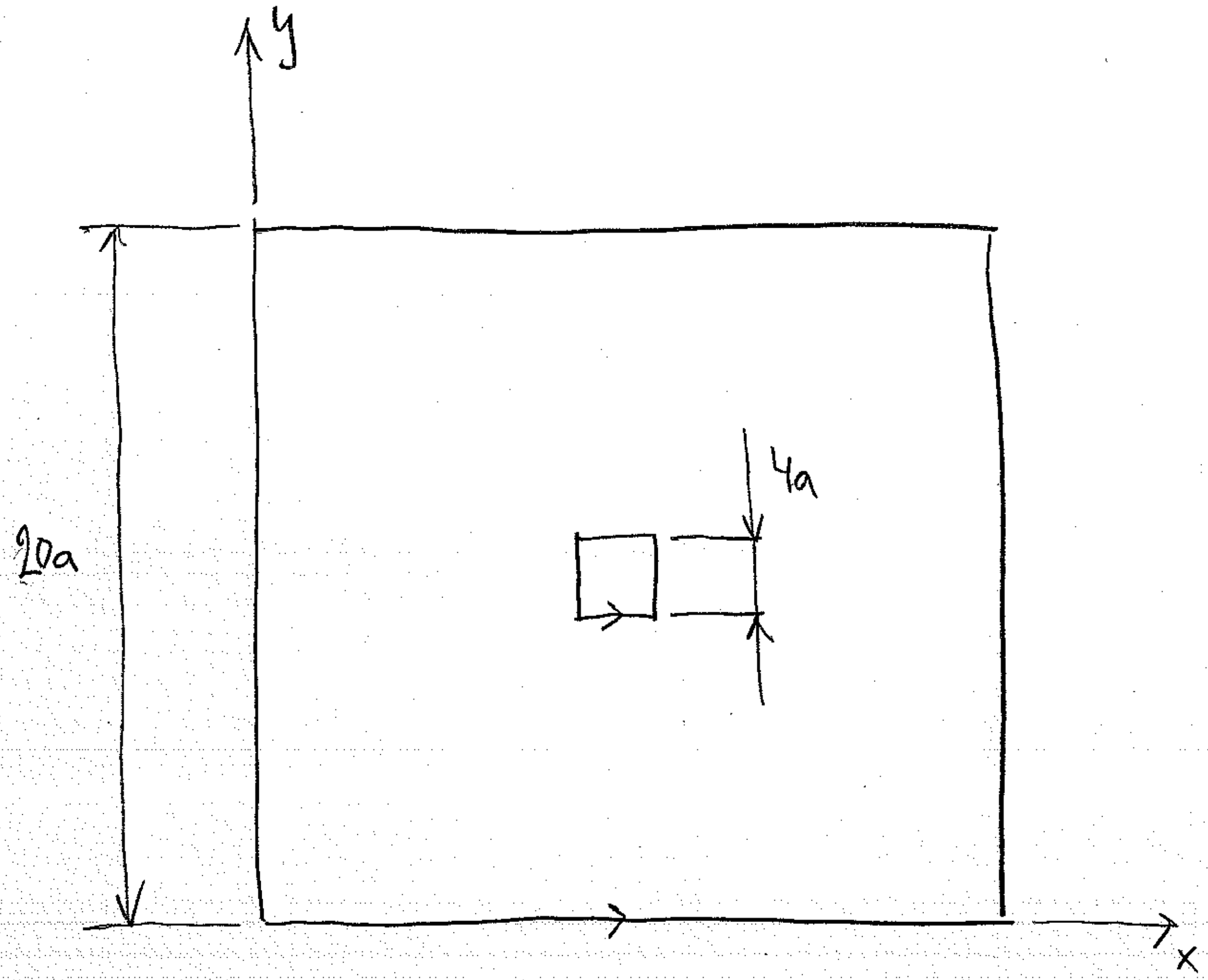
   där ρ_0 är konstant och $a > 0$ samt $b > 0$. Beräkna det elektriska fältet överallt.

3. En ledande kub har sidan a och ledningsförmågan $\sigma(z) = \sigma_0(1 + 2z/a)$, där axlarna i ett Kartesiskt koordinatsystem är parallella med tre av kubens sidor enligt figuren nedan. Två kvadratiska elektroder med sidan a är placerad på kubens ytor som sammanfaller med planen $z = 0$ och $z = a$. Elektroderna har mycket god ledningsförmåga. Beräkna resistansen mellan elektroderna.

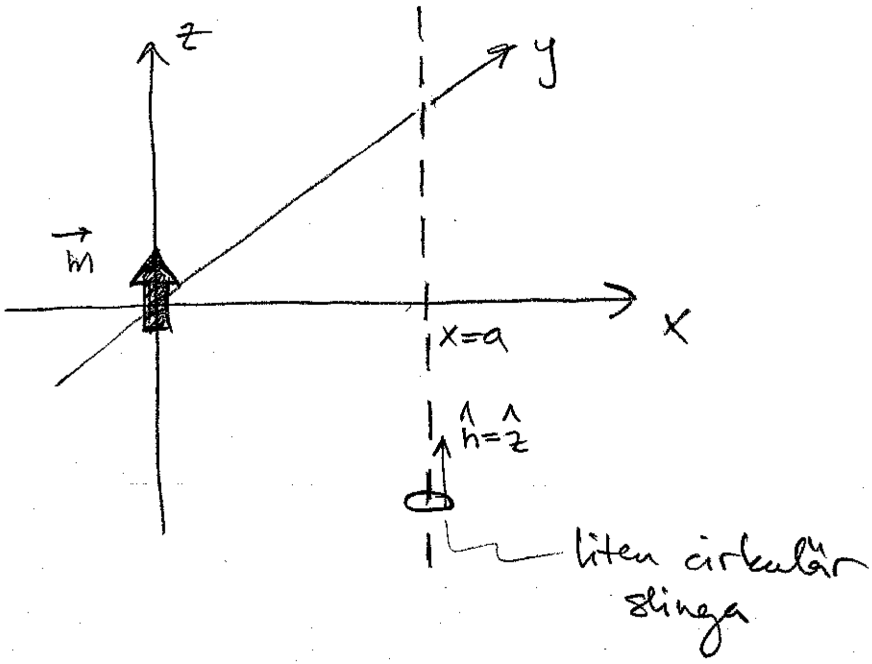


4. Två kvadratiskt formade metalltrådar är placerade i planet $z = 0$ så som figuren visar. Den stora kvadraten har sidan $20a$ och den lilla kvadraten har sidan $4a$. Kvadraternas sidor är parallella med x- och y-axeln i ett Kartesiskt koordinatsystem och mittpunkterna för de två kvadraterna sammanfaller. Den positiva referensriktningen för strömmen är moturs för båda slingorna enligt figuren. Beräkna den ömsesidiga induktansen mellan slingorna.

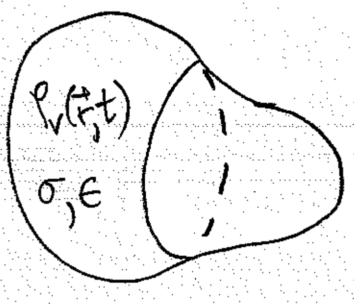
   Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



5. En magnet är placerad i origo och dess dipolmoment är $\vec{m} = m_0\hat{z}$. En liten cirkulär metallslinga med tvärsnittsarean A rör sig längs linjen $\vec{r}(t) = a\hat{x} + v_0 t\hat{z}$ med hastigheten v_0. Normalvektorn mot det plan som den lilla cirkulära metallslingans ligger i ges av $\hat{n} = \hat{z}$. Beräkna för vilket/vilka värden på t som den inducerade strömmen är noll i metallslingan.



6. En ledande kropp har den konstanta ledningsförmågan σ och den konstanta permittiviteten ϵ. Vid tidpunkten $t = 0$ är volymladdningsfördelningen i den ledande kroppen $\rho_v(\vec{r}, t = 0)$. Beräkna $\rho_v(\vec{r}, t)$ för alla tidpunkter $t > 0$.



Elektromagnetiska fält – 2011.04.28

(2) Först löser man delproblemet

$$\rho_v(x) = \begin{cases} \tilde{\rho}_v & \text{för } x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

Symmetri ger $\tilde{E}_x(-\xi) = -\tilde{E}_x(\xi)$ för $\xi = x - x_m$ där $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_0)$. Med hjälp av Gauss lag får man

$$\tilde{E}_x(x) = \begin{cases} (x - x_m)\tilde{\rho}_v/\epsilon_0 & \text{för } x_0 < x < x_1 \\ \tilde{\rho}_v \Delta x / 2\epsilon_0 & \text{för } x > x_1 \\ -\tilde{\rho}_v \Delta x / 2\epsilon_0 & \text{för } x < x_0 \end{cases}$$

där $\Delta x = x_1 - x_0$. Superposition ger

$$x < -a: \quad E_x = -\frac{(-\rho_0/a)a}{2\epsilon_0} - \frac{(+\rho_0/b)b}{2\epsilon_0} = 0$$

$$-a < x < 0: \quad E_x = \frac{(x + a/2)(-\rho_0/a)}{\epsilon_0} - \frac{(+\rho_0/b)b}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{x}{a} + 1\right]$$

$$0 < x < b: \quad E_x = \frac{(-\rho_0/a)a}{2\epsilon_0} + \frac{(x - b/2)(+\rho_0/b)}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{x}{b} - 1\right]$$

$$b < x: \quad E_x = \frac{(-\rho_0/a)a}{2\epsilon_0} + \frac{(+\rho_0/b)b}{2\epsilon_0} = 0$$

(Kontroll mha $\nabla \cdot \vec{E} = \partial E_x/\partial x = \rho_v/\epsilon_0$ är ok)

(3) Stationär strömning ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$) med elektroder och geometri enl. figur ger att $\vec{J} = \hat{z} J_z$ där J_z = konstant. Då $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ har man

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \hat{z} \frac{J_z}{\sigma_0 (1 + 2z/a)}$$

vilket ger potentialdifferensen

$$V(z=a) - V(z=0) = -\int_{L_{0\to a}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_{z=0}^{a} \left(\hat{z} \frac{J_z}{\sigma_0 (1 + 2z/a)} \right) \cdot (\hat{z} dz) = -\frac{J_z a \ln(3)}{2\sigma_0}$$

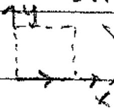
Total ström som flyter ut ur elektroden (in i kuben) i planet $z=a$ (antar att $V(z=a) > V(z=0)$) är

$$I = \int_{S_{a\times a}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} (\hat{z} J_z) \cdot (-\hat{z} dz)$$

$$= -a^2 J_z$$

Vilket ger

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V(z=a) - V(z=0)}{I} = \frac{\ln(3)}{2\sigma_0 a}$$

(4) Beräkna flöde i mittpunkten pga ström I_1 i den stora kvadraten (4 gånger )

$$\vec r = \hat x L/2 + \hat y L/2 \qquad \vec r - \vec r' = \hat x (L/2 - x') + \hat y L/2$$

$$\vec r' = \hat x x' \qquad |\vec r - \vec r'| = \left((L/2 - x')^2 + (L/2)^2\right)^{1/2}$$

$$\vec B(\vec r) = 4 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x'=0}^{L=20a} \frac{I_1 \hat x \times \left(\hat x (L/2 - x') + \hat y L/2\right)}{\left((L/2 - x')^2 + (L/2)^2\right)^{3/2}} dx'$$

$$= \hat z \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \int_{x'=0}^{L(=20a)} \frac{dx'}{\left[(L/2 - x')^2 + (L/2)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \hat z \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \frac{4\sqrt{2}}{L^2} = \hat z \frac{\mu_0 I_1 2\sqrt{2}}{\pi L}$$

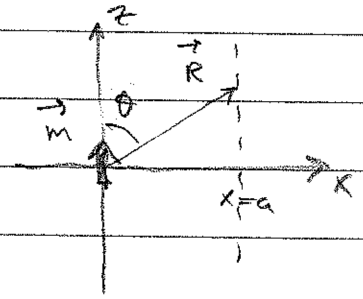
Ömsesidig induktans ($\vec B \simeq$ konst. över liten slinga)

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{S_{\text{liten kvad. } (l \times l)}} \vec B \cdot \hat z \, dS \simeq \frac{\mu_0 2\sqrt{2}}{\pi L} l^2$$

och med $L = 20a$ samt $l = 4a$ får man

$$L_{12} = \frac{\mu_0 2\sqrt{2}}{\pi 20 a} 16 a^2 = \frac{8\sqrt{2} \mu_0 a}{5\pi}$$

(5) Magnetisk flödestäthet längs linjen $\vec{r} = a\hat{x} + z\hat{z}$ ges av



$$B_z = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi R^3}\left(\hat{z}\cdot\hat{R}\, 2\cos\theta + \hat{z}\cdot\hat{\theta}\sin\theta\right)$$

med

$$\vec{R} = \hat{x}a + \hat{z}z \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \qquad \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\hat{z}\cdot\hat{R} = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \qquad \hat{z}\cdot\hat{\theta} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

vilket ger

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\left[2\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\,\frac{2z^2-a^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

och flödet genom den lilla slingan blir

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 m_0 A}{4\pi}\,\frac{2z^2-a^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

där A är arean för den lilla slingan

Inducerad ström blir noll då $\mathcal{V} = -d\Phi/dt = 0$ dvs då $d\Phi/dt = (d\Phi/dz)(dz/dt) = 0$ där $dz/dt = v_0 \neq 0$. Vi får

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2 - a^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}\right] = \frac{(9a^2 - 6z^2)\,z}{(a^2+z^2)^{7/2}} = 0$$

Villkoret ger: $z_1 = 0$ & $z_{2,3} = \pm\sqrt{3/2}\,a \Rightarrow t_1 = 0$ & $t_{2,3} = \pm\sqrt{3/2}\,a/v_0$

6) Divergensen av Ampère's lag ger

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})}_{=0} = \nabla\cdot\vec{J}_v + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{D}) = \left\{\vec{J}_v = \sigma\vec{E}\ \&\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v\right\}$$

$$= \nabla\cdot(\sigma\vec{E}) + \partial\rho_v/\partial t = (\sigma/\epsilon)\,\nabla\cdot(\epsilon\vec{E}) + \partial\rho_v/\partial t$$

$$= \left\{\vec{D} = \epsilon\vec{E}\right\} = (\sigma/\epsilon)\,\rho_v + \partial\rho_v/\partial t = 0$$

Lösningen till denna ordinära differential-ekvation (med givet begynnelsevillkor för $t=0$)

$$\rho_v(\vec{r},t) = \rho_v(\vec{r},t=0)\,\exp\left[-\frac{\sigma}{\epsilon}t\right]$$