Tentamen i Elektromagnetiska fält

2010-12-18, kl 8.30-12.30, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 9.15 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2010-12-18 kl 12.30
Granskning	2011-01-14 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N st punktladdningar blir

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet till att gälla den totala elektrostatiska energin hos en i rummet begränsad, kontinuerlig laddningsfördelning $\rho_v(\vec{r})$.

Räkneuppgifter:

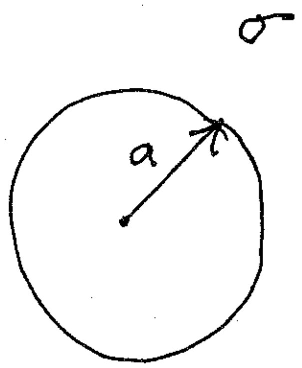
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En koaxialkabel består av en innerledare med radien a och en ytterledare med radien b, där $b > a$. Området mellan inner- och ytterledare har permittiviteten $\epsilon = \epsilon_0 b/r$. Beräkna kapacitansen per längdenhet.

3. En perfekt elektriskt ledande kula med radien a är placerad med mittpunkten i origo. Området runt omkring kulan är ledande och ledningsförmågan beskrivs konduktiviteten σ. Potentialen ges av uttrycket $V(R, \theta) = -E_0 a[R/a - (a/R)^2]\cos\theta$ i sfäriska koordinater för området $R \geq a$.

   a) Beräkna den elektriska strömtätheten $\vec{J}_v$ i området $R \geq a$.

   b) Beräkna den totala ström I som flyter genom den perfekt elektriskt ledande kulan.



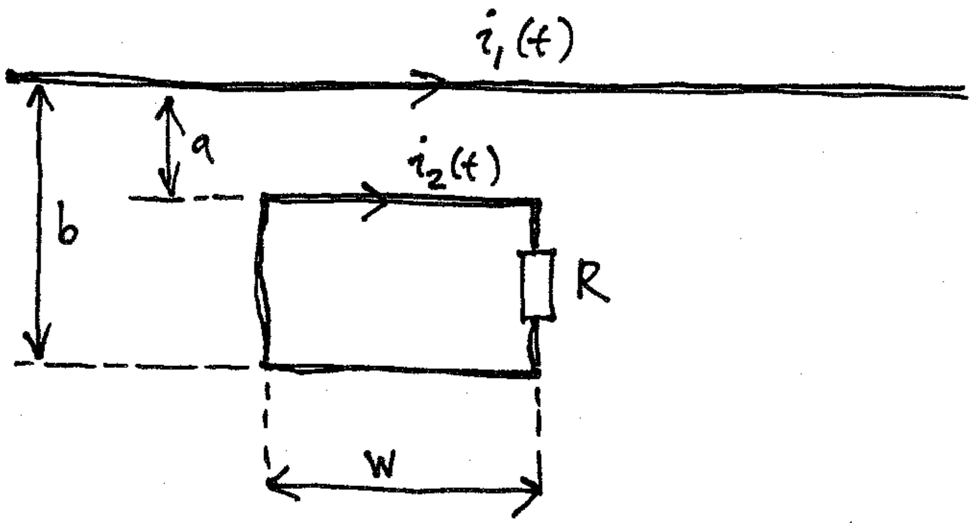
4. Det statiska magnetiska fältet $\vec{H}(\vec{r}) = \hat{\varphi} H_\varphi(r)$ i cylindriska koordinater har en φ-komponent som ges av

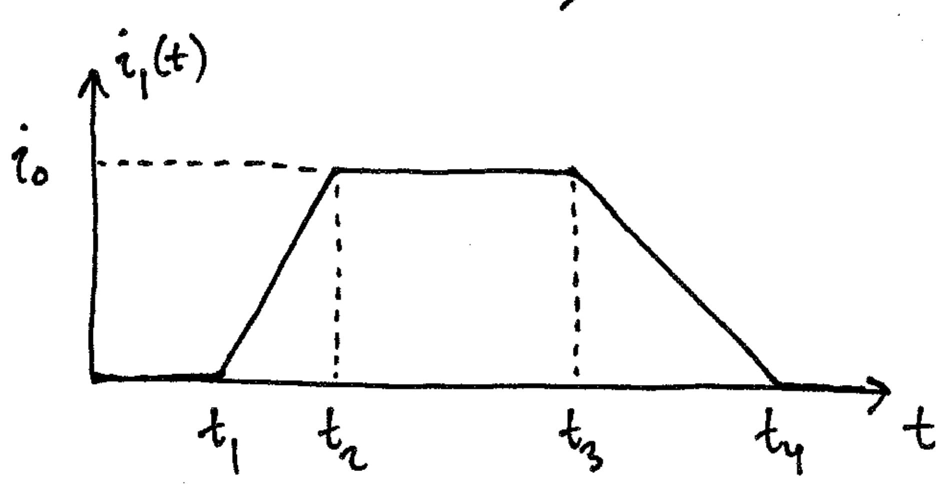
$$H_\varphi(r) = \begin{cases} I_0 r/(2\pi a^2) & \text{för } r < a \\ I_0/(2\pi r) & \text{för } a < r < b \\ 0 & \text{för } r > b \end{cases}$$

a) Beräkna volymströmtätheten $\vec{J}_\mathrm{v}$ för de tre olika områdena $r < a$, $a < r < b$ och $r > b$.

b) Beräkna ytströmtätheten $\vec{J}_\mathrm{s}$ för $r = a$ och $r = b$.

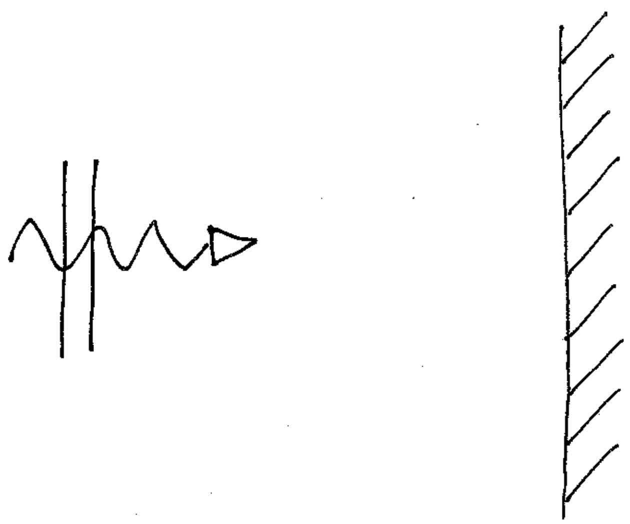
5. En slinga med resistansen R är formad enligt figuren nedan. Slingan är placerad i närheten av en tråd som för strömmen $i_1(t)$, där strömmen $i_1(t)$ ges av grafen nedan. Beräkna den inducerade strömmen $i_2(t)$ då kvasistationära förhållanden råder. Slingans självinduktans kan försummas.





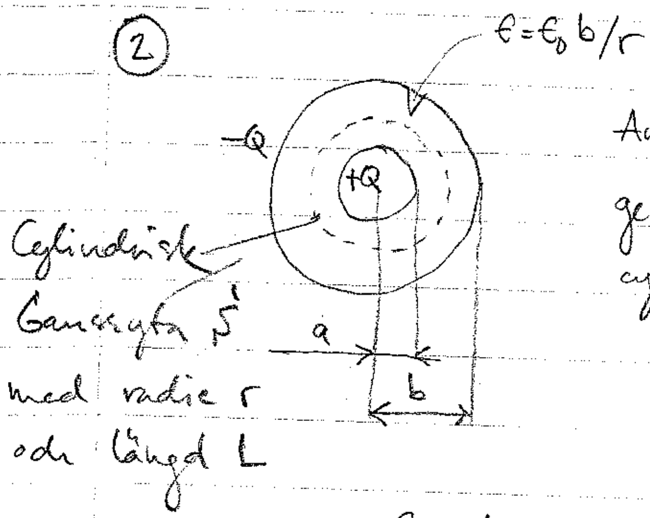
6. En elektromagnetisk planvåg i vakuum har ett elektriskt fält med toppvärdet E_0. Planvågen infaller vinkelrätt mot en oändligt stor perfekt elektriskt ledande plan skiva. Beräkna ytströmmen $\vec{J}_s$ som induceras på skivans yta.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



Elektromagnetiska fält — 2010.12.18

(2)



Ansats med laddning $+Q$ och $-Q$ ger (med Gauss lag och cylindrisk symmetri $\vec{D} = \hat{r} D_r(r)$)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{inne}$$

$$\Rightarrow 2\pi r L D_r(r) = Q \Rightarrow \vec{D} = \hat{r}\frac{Q/L}{2\pi r}$$

Elektriskt fält blir därmed

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \hat{r}\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 \frac{b}{r} r} = \hat{r}\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 b}$$

och potentialskillnaden (= spänningen) blir

$$U = -\int_{L_{ytter \to inner}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{r=a}^{b} \left(\hat{r}\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 b}\right) \cdot \left(-\hat{r}\,dr\right)$$

$$= \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 b}(b-a) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

vilket ger kapacitans per längdenhet som

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{1 - a/b}$$

③ Den elektriska strömtätheten ges av

$$\vec{J}_v = \sigma\vec{E} = -\sigma\nabla V = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gradienten i sfäriska} \\ \text{koordinater från BETA} \end{array} \right\}$$

$$= -\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)$$

$$= \left\{ V(R,\theta) = -E_0 a\left[\frac{R}{a} - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right]\cos\theta \right\}$$

$$= \sigma E_0 a\left(\left[\frac{1}{a} + 2\frac{a^2}{R^3}\right]\cos\theta\,\hat{R} - \frac{1}{R}\left[\frac{R}{a} - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right]\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \sigma E_0\left(\left[1 + 2\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\theta\,\hat{R} - \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

På ytan av det perfekt elektriskt ledande klotet blir strömtätheten

$$\vec{J}_v(R=a) = \sigma E_0\, 3\cos\theta\,\hat{R}$$

dvs. strömmen flyter ut ur klotet ($\hat{R}\cdot\vec{J}_v > 0$) då $0 \le \theta < \pi/2$ ($\cos\theta > 0$) och in i klotet då $\pi/2 < \theta \le \pi$ ($\cos\theta < 0$)

Strömmen som flyter genom hålet blir

$$I = \int_S \vec{J}_v \cdot \vec{ds} = \left\{ \begin{array}{l} S = \text{halvsfär med radie } a \\ \text{där } 0 \le \theta \le \pi/2 \Rightarrow \vec{ds} = \hat{R} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \end{array} \right.$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\sigma E_0 3\cos\theta \hat{R}) \cdot (\hat{R} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi)$$

$$= 3\sigma E_0 \cdot 2\pi a^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \, d\theta$$

$$= 3\sigma E_0 \pi a^2 \underbrace{\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{= 1/2 + 1/2 = 1} = 3\sigma E_0 \pi a^2$$

(4) Volymströmtätheten fås ur Ampères lag

$$\vec{J}_v = \nabla \times (\hat{\varphi} H_\varphi(r)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotation i cylindriska} \\ \text{koord från BETA} \end{array} \right\}$$

$$= \hat{z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi(r))$$

Området $r < a$ ger

$$\vec{J}_v = \hat{z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{I_0 r^2}{2\pi a^2} \right) = \hat{z} \frac{1}{r} \frac{I_0 2r}{2\pi a^2}$$

$$= \hat{z} \frac{I_0}{\pi a^2}$$

Området $a<r<b$ ger

$$\vec{J}_v = \hat{z}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I_0}{2\pi}\right) = \vec{0}$$

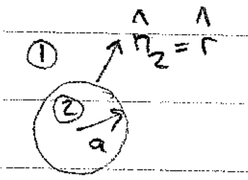
Området $r>b$ ger

$$\vec{J}_v = \hat{z}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(0\right) = \vec{0}$$

Ytströmtätheten fås ur randvillkoret

$$\vec{J}_s = \hat{n}_2 \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)$$

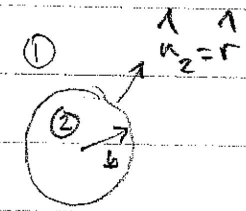
För $r=a$ med $\hat{n}_2 = \hat{r}$ fås



$$\vec{J}_s = \hat{r} \times \left(\hat{\varphi}\,\frac{I_0}{2\pi r} - \hat{\varphi}\,\frac{I_0 r}{2\pi a^2}\right)\Bigg|_{r=a} = \vec{0}$$

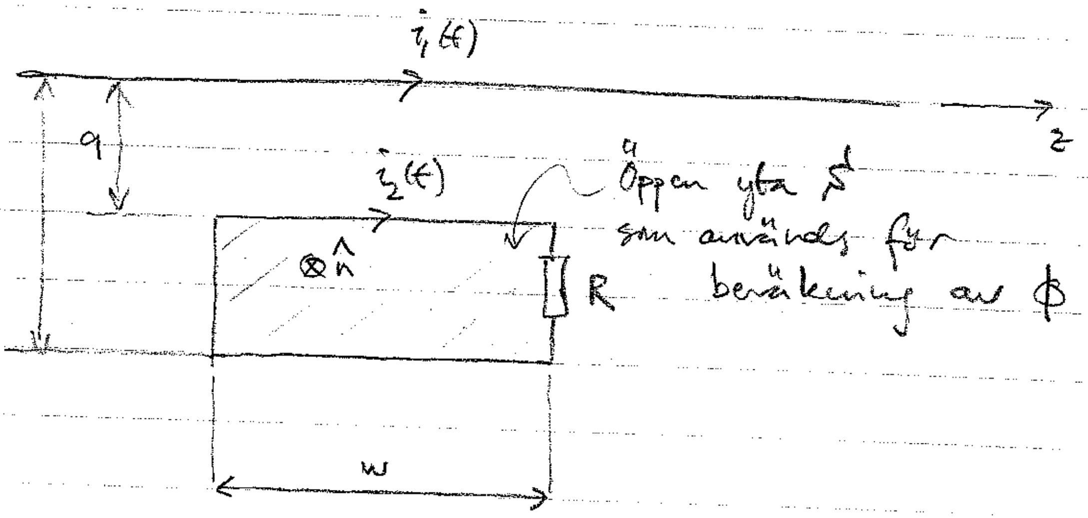
pss för $r=b$ med $\hat{n}_2 = \hat{r}$ fås

$$\vec{J}_s = \hat{r} \times \left(\vec{0} - \hat{\varphi}\,\frac{I_0}{2\pi r}\right)\Bigg|_{r=b}$$



$$= -\hat{z}\,\frac{I_0}{2\pi b}$$

5



Enligt Ampères lag (cylindrisk symmetri med $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi(r)$) så ger strömmen i_1 magnetfältet

cirkulär kurva L med radie r

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{omsl}} \Rightarrow 2\pi r \, H_\varphi(r) = i_1$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \hat{\varphi} \frac{i_1}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

Flödet genom slingan blir därmed

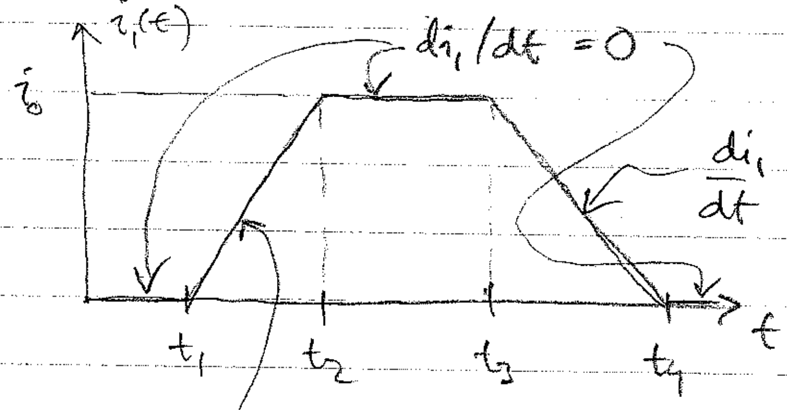
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{r=a}^{b} \left(\hat{\varphi} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \right) \cdot \left(\hat{\varphi} \, w \, dr \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i_1 w}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Vilket ger den inducerade strömmen

$$i_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 w}{2\pi R}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di_1}{dt}$$

där di_1/dt fås från grafen



$$di_1/dt = 0$$

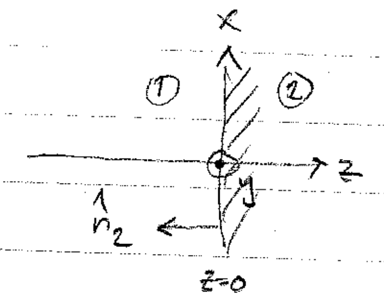
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{0 - i_0}{t_4 - t_3} = -\frac{i_0}{t_4 - t_3}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{i_0 - 0}{t_2 - t_1} = \frac{i_0}{t_2 - t_1}$$

Alltså får man

$$i_2(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 w}{2\pi R}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{i_0}{t_2 - t_1} & \text{då } t_1 < t < t_2 \\ +\frac{\mu_0 w}{2\pi R}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{i_0}{t_4 - t_3} & \text{då } t_3 < t < t_4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(6)



Infallande våg $\vec{E}^i = \hat{x} E_0^i e^{-jkz}$ och reflekterad våg $\vec{E}^r = \hat{x} E_0^r e^{+jkz}$ ger totalt elektriskt fält

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^r = \hat{x} E_0^i e^{-jkz} + \hat{x} E_0^r e^{+jkz}$$

På ytan $z=0$ gäller $\hat{n}_2 \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$ och för $\hat{n}_2 = -\hat{z}$ får man

$$-\hat{z} \times (\vec{E} - \vec{0})\Big|_{z=0} = -\hat{y}\left(E_0^i e^{-jkz} + E_0^r e^{+jkz}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= -\hat{y}\,(E_0^i + E_0^r) = \vec{0} \Rightarrow E_0^r = -E_0^i$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{x} E_0^i \left(e^{-jkz} - e^{+jkz}\right)$$

Vilket ger det magnetiska fältet (mha Faradays lag)

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} \overset{\text{BETA}}{=} \frac{\hat{y}}{-j\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \hat{y} \frac{E_0^i}{-j\omega\mu_0}\left(-jke^{-jkz} - jke^{+jkz}\right)$$

$$= \hat{y} \frac{k}{\omega\mu_0} E_0^i \left(e^{-jkz} + e^{+jkz}\right)$$

Och ytströmtätheten blir enl. $\hat{n}_2 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$

$$\vec{\mathcal{J}}_s = -\hat{z} \times \left(\hat{y} \frac{k}{\omega\mu_0} E_0^i \left(e^{-jkz} + e^{+jkz}\right) - \vec{0} \right) \Bigg|_{z=0}$$

$$= \hat{x} \frac{k}{\omega\mu_0} 2E_0^i = \left\{ \begin{array}{l} k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \text{ enl.} \\ \text{formelsamlingen} \end{array} \right\}$$

$$= \hat{x} \frac{1}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} 2E_0^i = \left\{ \begin{array}{l} \eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \text{ enl.} \\ \text{formelsamlingen} \end{array} \right\}$$

$$= \hat{x} \frac{2E_0^i}{\eta_0}$$

Enligt problemtexten är $E_0^i = E_0$ vilket ger

$$\vec{\mathcal{J}}_s = \hat{x} \frac{2E_0}{\eta_0} \quad \left(\begin{array}{c}\text{frekvens-}\\ \text{planet}\end{array}\right)$$

$$\vec{J}_s = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathcal{J}}_s e^{j\omega t} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \hat{x} \frac{2E_0}{\eta_0} e^{j\omega t} \right\}$$

$$= \hat{x} \frac{2E_0}{\eta_0} \cos(\omega t) \quad \left(\begin{array}{c}\text{tids-}\\ \text{planet}\end{array}\right)$$