Tentamen i Elektromagnetiska fält

2010-04-08, kl 14.00-18.00, "Maskin"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, "Table of formulas for EEM015" *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1724 Per Jacobsson, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2010-04-08 kl 18.00
Resultatet	Anslås vid Linsen 2010-04-23 kl 12.00
Granskning	2010-04-26 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från Maxwells ekvationer,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

och att aktuellt medium är källfritt, ickeledande och karakteriseras av ε och μ. Härled de homogena vågekvationerna för **E** och **H**!

[10p]

Räkneuppgifter

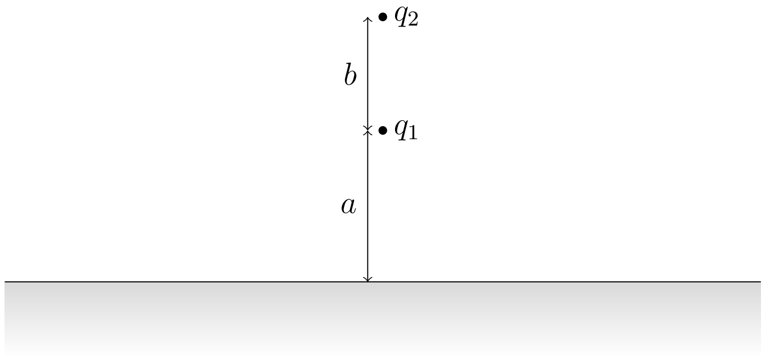
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, Table of formulas for EEM015]

2. En metallsfär med radie a och total laddning $+Q$ placeras inuti en annan metallsfär med radie $b > a$ och total laddning $-Q$. Sfärerna är koncentriska, dvs har samma mittpunkt. Beräkna det elektriska fältet överallt!

Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

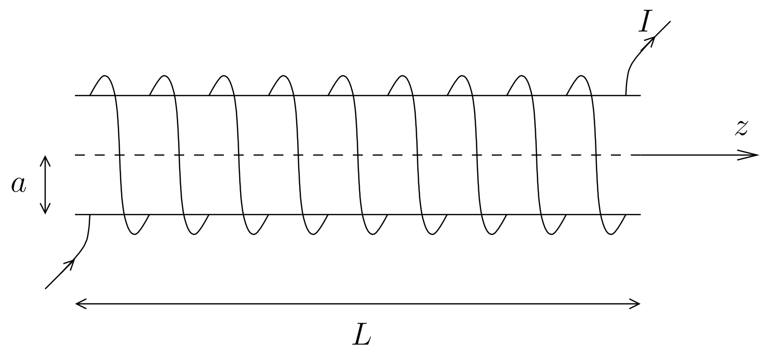
[10p]

3. En punktladdning q_1 befinner sig i punkten $(0, 0, a)$ och en annan punktladdning q_2 befinner sig i punkten $(0, 0, a + b)$. Ett oändligt metallplan sammanfaller med planet $z = 0$. Beräkna kraften på laddningen q_2!



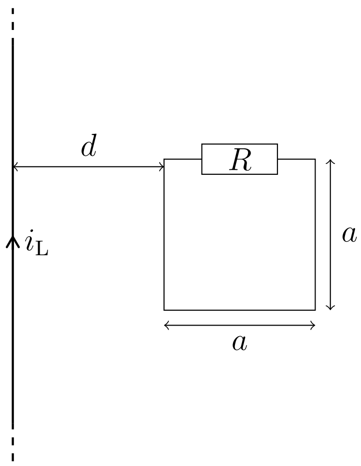
[10p]

4. En spole med N varv är tätt lindad. Spolens längd är L och dess radie a. Spolens axel sammanfaller med z-axeln. I tråden går en konstant ström I. Beräkna magnetiska flödestätheten för en godtycklig punkt på z-axeln.



[10p]

5. En kvadratisk slinga med sida a befinner sig på avstånd d från en väldigt lång rak ledare. Slingan har resistansen R och dess självinduktans kan försummas. I den raka ledaren flyter strömmen $i_\mathrm{L} = I_\mathrm{L} \cos \omega t$. Beräkna den inducerade strömmen i den kvadratiska slingan. Ange storlek och riktning på den inducerade strömmen.



[10p]

6. I en rektangulär vågledare med bredd a och höjd b ges det elektriska fältet av

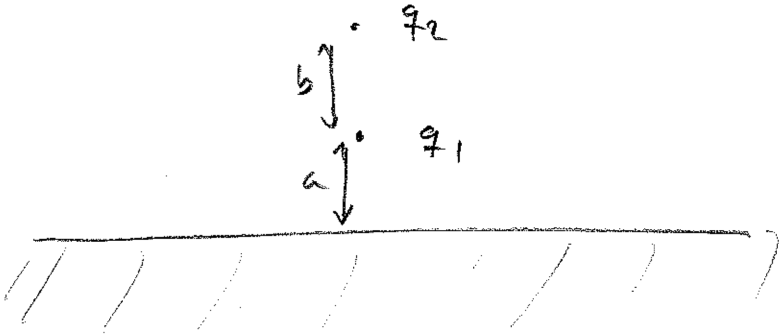
$$\mathbf{E} = \hat{y} E_0 \sin(\frac{\pi}{a} x) e^{-j\beta z},$$

där E_0 är en konstant. Uttrycket för det elektriska fältet gäller för $0 \leq x \leq a$ och $0 \leq y \leq b$. Beräkna det magnetiska fältet och skriv det på reell form.

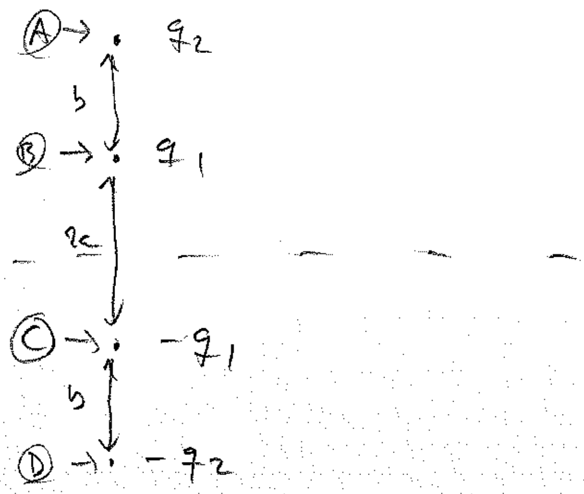
[10p]

① & ② se föreläsning/övning

③



Spegling i metallplan:



Inför beteckningar A, B, C, D

Coulombs lag: kraft på laddning Q_2 pga Q_1:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Kraft på A pga B: $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = b$, $\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} = \hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{BA} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \hat{z}$$

Kraft på A pga C: $|\vec{r}_A - \vec{r}_C| = 2a + b$, $\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_C}{|\vec{r}_A - \vec{r}_C|} = \hat{z}$

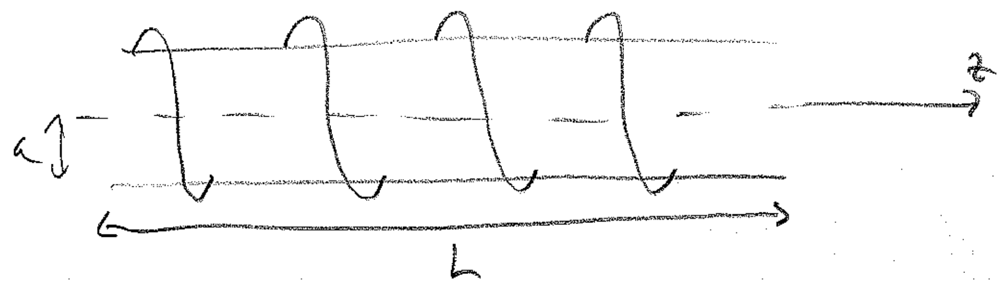
$$\Rightarrow \vec{F}_{CA} = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2a+b)^2} \hat{z}$$

Kraft på A pga D: $|\vec{r}_A - \vec{r}_D| = 2a+2b$, $\dfrac{\vec{r}_A - \vec{r}_D}{|\vec{r}_A - \vec{r}_D|} = \hat{z}$

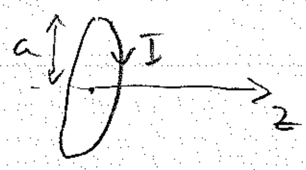
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{DA} = \frac{-q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 (2a+2b)^2}\hat{z}$$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{DA} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{z}\left(\frac{q_1}{b^2} - \frac{q_1}{(2a+b)^2} - \frac{q_2}{4(a+b)^2}\right)$$

+



$\vec{B}_s$ från en strömslinga vid z':



Biot-Savart: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_L \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dl'$

$\vec{r} = z\hat{z}$ $\qquad \vec{r}-\vec{r}' = (z-z')\hat{z} - a\hat{r}$

$\vec{r}' = z'\hat{z} + a\hat{r}$ $\qquad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(z-z')^2+a^2}$

$\vec{I} = I\hat{\varphi}$

$dl' = a\,d\varphi$

$$\Rightarrow \vec{B}_s(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{\varphi}}{((z-z')^2+a^2)^{3/2}} \times \left((z-z')\hat{z} - a\hat{r}\right) a\, d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(z-z')\hat{r} + a\hat{z}}{((z-z')^2+a^2)^{3/2}}\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \frac{(z-z')}{((z-z')^2+a^2)^{3/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\varphi}_{=0} + \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \frac{a\hat{z}}{((z-z')^2+a^2)^{3/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} =$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I}{2((z-z')^2+a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Summera bidrag från N slingor:

Antal slingor per längdenhet: $\frac{N}{L}$

$\Rightarrow$ Totalt $\vec{B}$ ges av

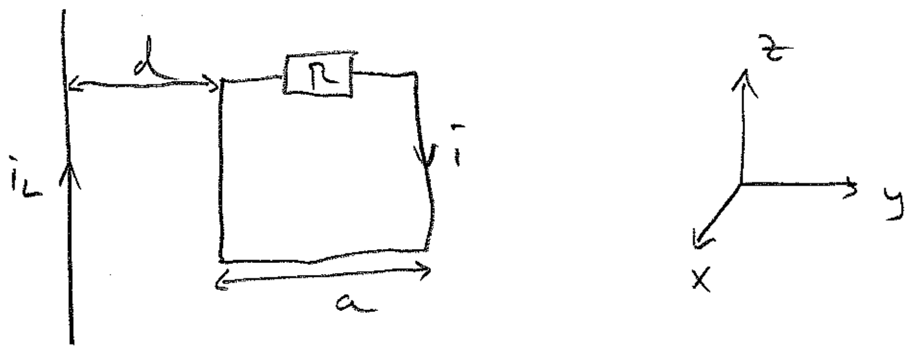
$$\vec{B}(z) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 a^2 I N \hat{z}}{2L((z-z')^2+a^2)^{3/2}} dz' = \frac{\mu_0 a^2 I N \hat{z}}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{((z-z')^2+a^2)^{3/2}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} s = z - z' \\ dz' = -ds \end{Bmatrix} = \frac{\mu_0 a^2 I N \hat{z}}{2L} \int_{z+L/2}^{z-L/2} \frac{-ds}{(s^2+a^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I N \hat{z}}{2L} \left[\frac{s}{a^2\sqrt{s^2+a^2}} \right]_{z-L/2}^{z+L/2} =$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I N}{2L} \left(\frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2+a^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{(z-L/2)^2+a^2}} \right)$$

5



$\vec{H}$ från ledaren: $\vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi}$ pga symmetri

Ampères lag: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{oms.}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} r d\varphi = 2\pi r H_\varphi = i_L \quad \Rightarrow H_\varphi = \frac{i_L}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i_L}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

I Cartesiska koordinater: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_L}{2\pi y}(-\hat{x})$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i_L}{2\pi y}(-\hat{x}) \cdot (-\hat{x}) \, dy \, dz =$$

$$= \frac{\mu_0 i_L a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i_L a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \frac{di_L}{dt} =$$

$$= \frac{\mu_0 a I_L \omega}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \sin \omega t$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 a I_L \omega}{2\pi R} \ln \frac{d+a}{d} \sin \omega t$$

⑥ $\vec{E} = \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$

Faradays lag: $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E} = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{j\omega\mu_0} \left(-\hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{-1}{j\omega\mu_0} \left[-\hat{x} \left(-j\beta E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \right) + \right.$$

$$\left. + \hat{z} \left(\frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \right) \right] =$$

$$= -\hat{x} \frac{\beta E_0}{\omega\mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} + \hat{z} \frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

På reell form: $e^{-j\beta z} \rightarrow \cos(\omega t - \beta z)$

$j = e^{j\pi/2} \Rightarrow j e^{-j\beta z} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \beta z\right)} \rightarrow \cos\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= -\sin(\omega t - \beta z)$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\hat{x} \frac{\beta E_0}{\omega\mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) -$$

$$- \hat{z} \frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)$$