Tentamen i Elektromagnetiska fält

2009-12-18, kl 08.30-12.30, ”Maskin”-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, ”Table of formulas for EEM015” *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 09.15 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1724 Per Jacobsson, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2009-12-18 kl 12.30
Resultatet	Anslås vid Linsen 2010-01-15 kl 12.00
Granskning	2010-01-19 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från Maxwells ekvationer i komplex form,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

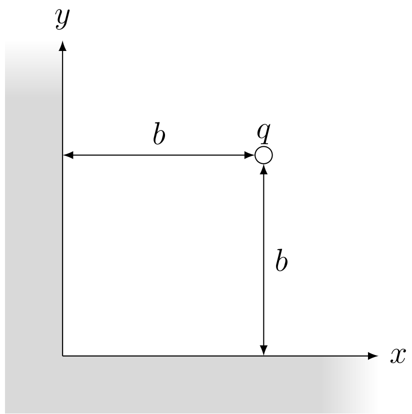
Härled ett uttryck för utbredningskonstanten γ för en s.k. plan våg, som utbreder sig i ett material karakteriserat av ε, μ och σ! Ansätt därefter $\mathbf{E} = \hat{x}E_0e^{-\gamma z}$ och härled uttrycket för vågimpedansen Z för denna våg!

[10p]

Räkneuppgifter

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, Table of formulas for EEM015]

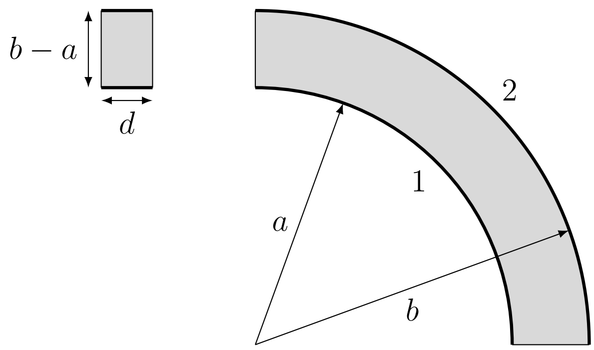
2. En liten metallsfär med radie a har total laddning q. Metallsfären befinner sig på avstånd $b \gg a$ från två stora metallplan enligt figur. Beräkna kraften på metallsfären!



Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.

[10p]

3. Ett ledande material med tjocklek d och konduktivitet σ är format som en fjärdedel av en ring med rektangulärt tvärsnitt. Ringen har innerradie a och ytterradie b. Beräkna resistansen mellan sidorna 1 och 2 (de fetmarkerade sidorna i figuren)!

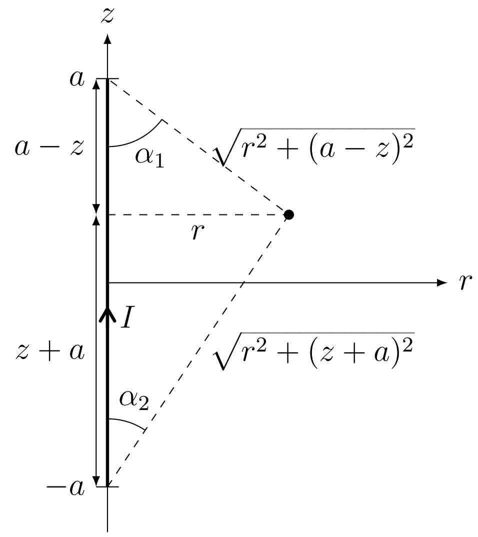


[10p]

4. a) Utgå från Biot-Savarts lag och visa att magnetiska flödestätheten på avstånd r från en ändlig rak ledare med längd $2a$ kan skrivas

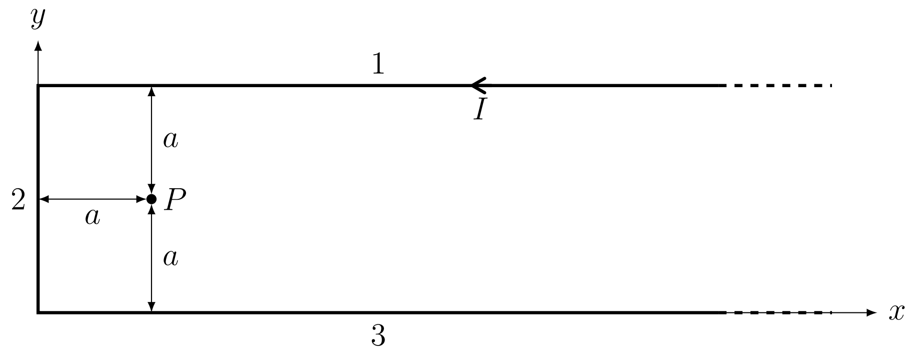
$$\mathbf{B} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

med beteckningar enligt figur nedan.



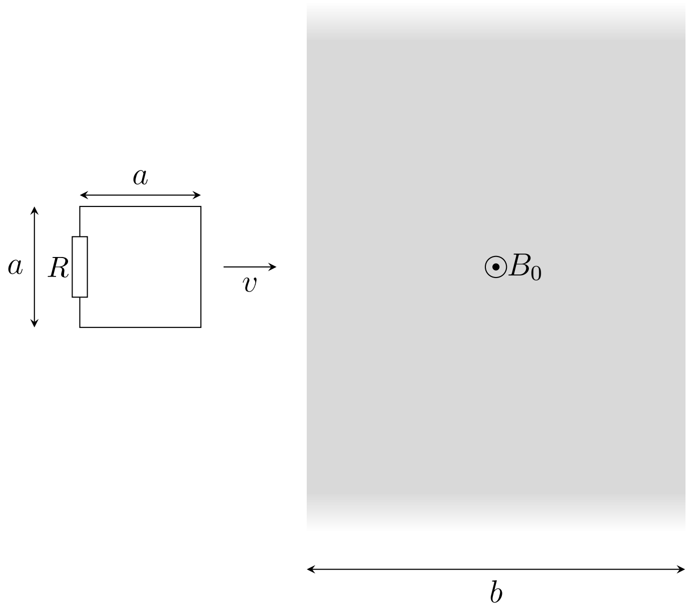
[7p]

b) I figuren nedan befinner sig punkten P på avstånd a från tre ledare med ström I. Ledare 1 och 3 sträcker sig till oändligheten i x-riktning. Beräkna $\mathbf{B}$ i punkten P.



[3p]

5. En kvadratisk slinga med sida a och resistans R rör sig med hastigheten v. Vid tiden $t = 0$ passerar slingans framkant in i ett område med konstant magnetfält som sträcker sig ändligt långt i samma riktning som slingans hastighet. Beräkna inducerad ström (storlek och riktning) i slingan för **alla** tider! Rita en graf med ström som funktion av t! (Det går bra att bortse från slingans självinduktans.)



[10p]

6. a) Visa att

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

för en våg

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

där $\mathbf{E}_0$ är en konstant vektor.

[6p]

b) Beräkna magnetiska fältet då elektriska fältet ges av

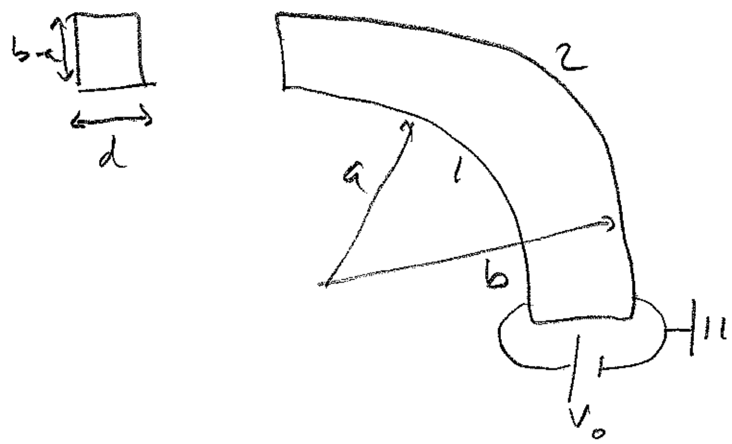
$$\mathbf{E} = (4\hat{y} + 3\hat{z})e^{-j(6y-8z)}$$

[4p]

Elektromagnetiska fält EEM 015 – 2009-12-18

2) se lösningar till exempelsamling

3)



Alt 1

Ansätt V_0

Laplace: $\nabla^2 V = 0$ i cylindriska koordinater:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r} = C_1 \Rightarrow V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$V(a) = V_0 \,,\; V(b) = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}} \ln\frac{b}{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \hat{r}\frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}\, r}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \hat{r}\frac{\sigma V_0}{\ln\frac{b}{a}\, r}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma V_0}{\ln\frac{b}{a}\, r}\, d \cdot r\, d\varphi = \frac{\sigma V_0 \pi d}{2 \ln\frac{b}{a}}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{2\ln\frac{b}{a}}{\sigma \pi d}$$

Alt 2

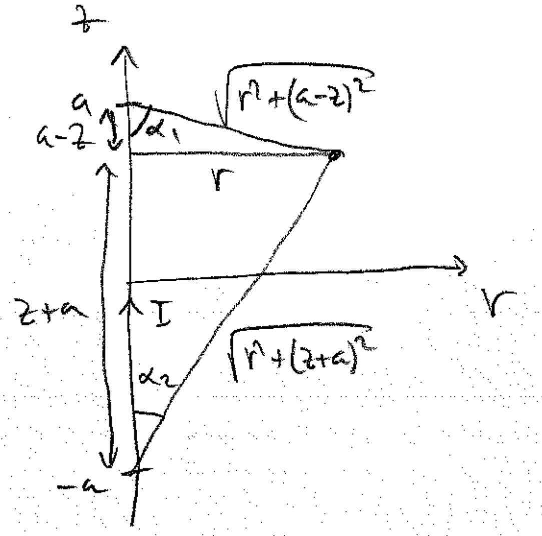
Pga symmetri: $\vec{J} = \hat{r}\frac{I}{S} = \hat{r}\frac{I}{d\frac{\pi}{2}r} = \hat{r}\frac{2I}{d\pi r}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \hat{r}\frac{2I}{\sigma\pi d r}$$

$$V_0 = -\int_a^b \frac{2I}{\sigma\pi d r}\hat{r}\cdot(-\hat{r})\,dr = \frac{2I}{\sigma\pi d}\ln\frac{b}{a}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{2\ln\frac{b}{a}}{\sigma\pi d}$$

4)
a)



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dl'$$

$$\vec{I} = I\hat{z}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = z'\hat{z}$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = r\hat{r} + (z-z')\hat{z}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+(z-z')^2}$$

$$dl' = dz'$$

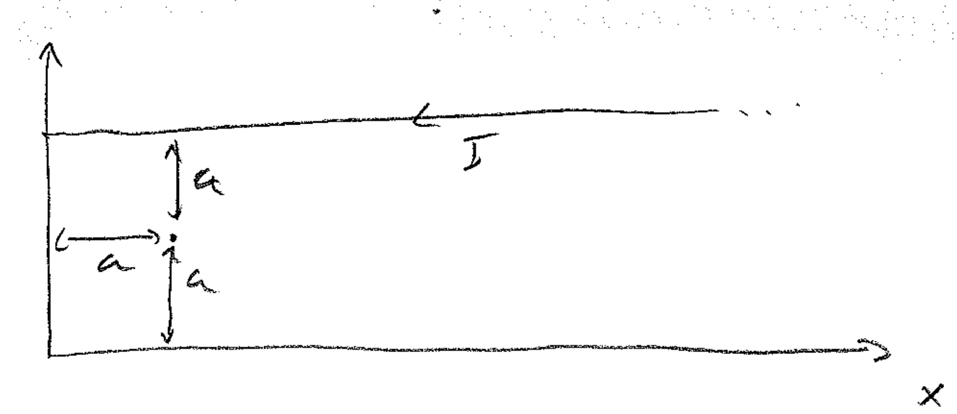
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\hat{z}}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}\times\left(r\hat{r} + (z-z')\hat{z}\right)dz' =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{r\hat{\varphi}}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}\,dz' = \left\{\begin{matrix} z-z' = s, & z' = -a \to s = z+a \\ dz' = -ds, & z' = a \to s = z-a \end{matrix}\right\} =$$

$$= \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I r}{4\pi}\int_{z-a}^{z+a}\frac{ds}{(r^2+s^2)^{3/2}} = \{\text{Beta}\} = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I r}{4\pi}\left[\frac{s}{r^2\sqrt{r^2+s^2}}\right]_{z-a}^{z+a} =$$

$$= \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{z+a}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}} + \frac{a-z}{\sqrt{r^2+(a-z)^2}}\right) = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \text{ enl. fig.}$$

b)



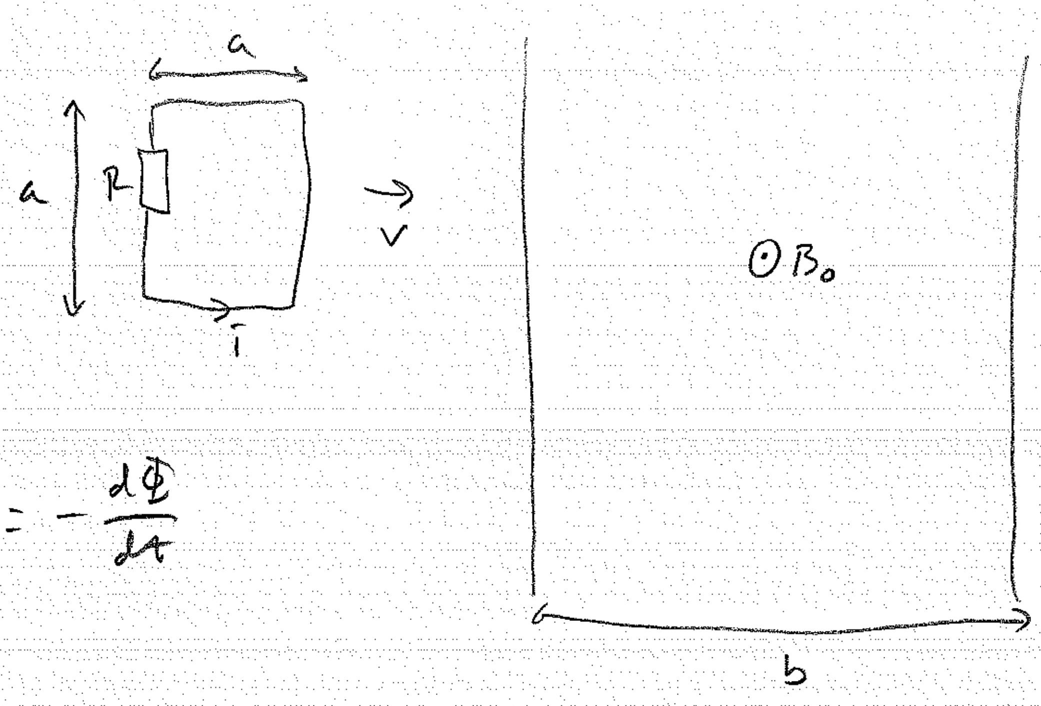
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 =$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[(\cos 45 + \cos 0) + (\cos 45 + \cos 45) + (\cos 0 + \cos 45)\right] =$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

5)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$t<0: \Phi = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 0$

$0 \le t \le \frac{a}{v}$

$$\Phi = B_0 S(t) = B_0 a v t$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a v$$

$$\Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B_0 a v}{R}$$

$\frac{a}{v} \le t \le \frac{b}{v}$

$$\Phi = B_0 S = B_0 a^2 \Rightarrow \mathcal{E} = 0 \Rightarrow i = 0$$

$\frac{b}{v} \le t \le \frac{b+a}{v}$

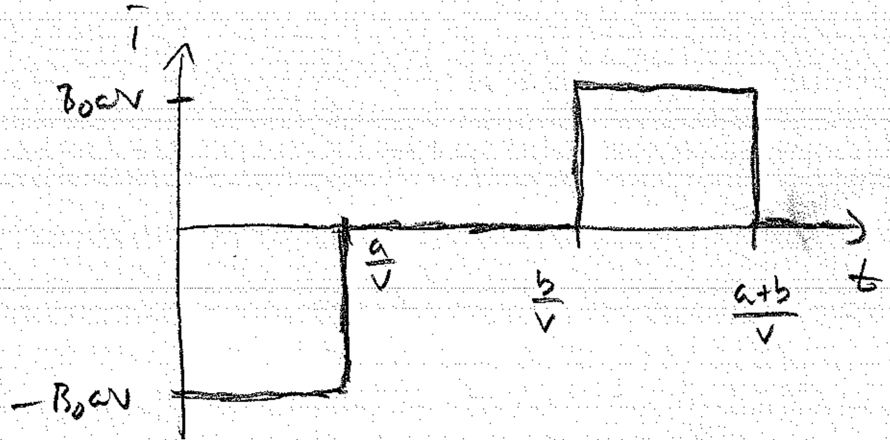
$$\Phi = B_0 S(t) = B_0 a\left(a - v\left(t - \frac{b}{v}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a v$$

$$\Rightarrow i = \frac{B_0 a v}{R}$$

$t > \frac{b+a}{v}$

$$\Phi = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 0$$



6) a) $\nabla\times\vec{E} = e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \underbrace{\nabla\times\vec{E}_0}_{=0} + \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \times \vec{E}_0 =$

$$= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \times \vec{E}_0 =$$

$$= \left(\hat{x}(-jk_x) + \hat{y}(-jk_y) + \hat{z}(-jk_z)\right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \times \vec{E}_0 =$$

$$= -j\vec{k}\times\vec{E}_0\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}\times\vec{E}$$

b) $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega\mu}(6\hat{y} - 8\hat{z})\times(4\hat{y} + 3\hat{z})\, e^{-j(6y-8z)} =$

$$= \frac{1}{\omega\mu}(18\hat{x} + 32\hat{x})\, e^{-j(6y-8z)} = \hat{x}\frac{40}{\omega\mu}\, e^{-j(6y-8z)}$$