Tentamen i Elektromagnetiska fält

2009-08-18, kl 8.30-12.30, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 9.15 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2009-08-18 kl 12.30
Resultatet	Anslås vid Linsen 2009-08-28 kl 12.00
Granskning	2009-08-31 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Visa att ömsesidiga elektrostatiska energin i ett system av N st punktladdningar blir

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Generalisera resultatet till att gälla den totala elektrostatiska energin hos en i rummet begränsad, kontinuerlig laddningsfördelning $\rho(\vec{R})$!

Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

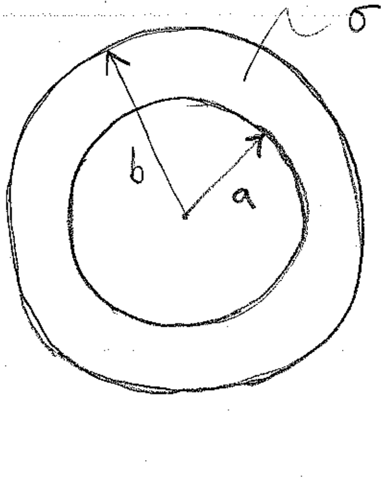
2. En sfärisk symmetrisk laddningsfördelning i vakuum ger upphov till en sfärisk symmetrisk potential som ges av

$$V(R) = \begin{cases} V_0[1-(R/a)^2] & \text{for } R \leq a \\ 0 & \text{for } R > a \end{cases}$$

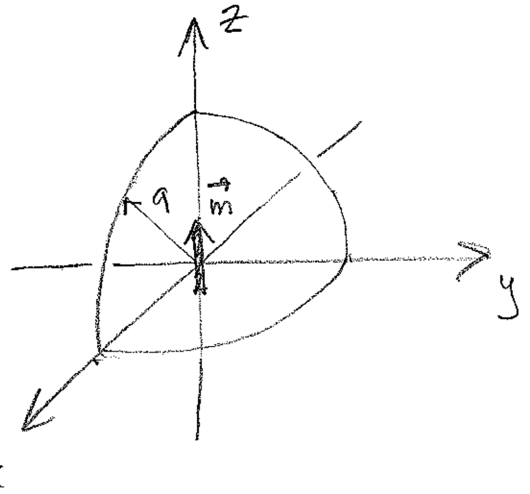
i sfäriska koordinater. Beräkna laddningsfördelningen.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

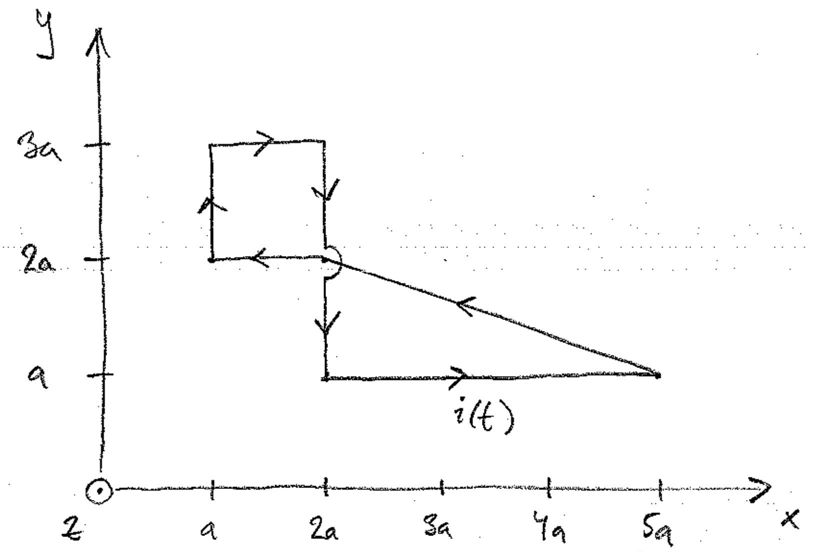
3. Området mellan två koncentriska sfäriska metallskal upptas av ett ledande material med konduktiviteten $\sigma(R) = \sigma_0 a/R$, där R är avståndet från de sfäriska metallskalens gemensamma mittpunkt. Radien för det inre metallskalet är a och radien för det yttre metallskalet är b, där $b > a$. Beräkna resistansen mellan metallskalen.



4. En magnetisk dipol med dipolmomentet $\vec{m} = \hat{z}m_0$ är placerad i origo. Beräkna det magnetiska flödet genom den åttondelssfär med radien a som beskrivs av ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$.



5. En slinga med resistansen R är formad enligt figuren nedan. Slingan befinner sig i ett område med den magnetiska flödestätheten $\vec{B} = \hat{z}B_0 \cos(\omega t)$. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ då frekvensen ω är så låg att kvasistationära förhållanden råder. Slingans självinduktans kan försummas.



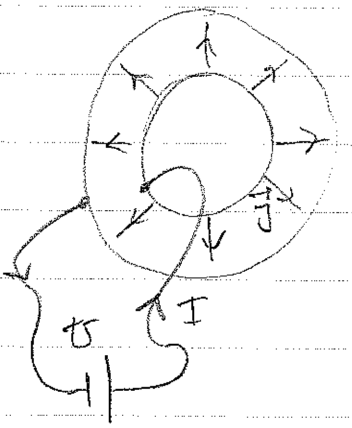
6. En oändligt stor plan metallskiva som sammanfaller med planet $z = 0$. I området $z \geq 0$ ovanför metallskivan ges det elektriska fältet i frekvensdomänen av

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \sqrt{2}\boldsymbol{E}_0 \left[\hat{x} j \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) + \hat{z} \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right] e^{-jkx/\sqrt{2}}.$$

Beräkna den inducerade ytströmmen på metallskivan.

Elektromagnetiska fält 2009-08-18

(3)



$$\vec J = \frac{I}{4\pi R^2}\,\hat R$$

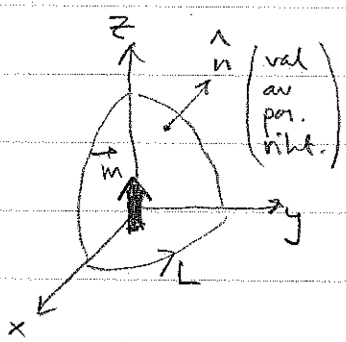
$$\vec E = \frac{\vec J}{\sigma} = \frac{R}{\sigma_0 a}\,\frac{I}{4\pi R^2}\,\hat R = \frac{I}{4\pi a \sigma_0 R}\,\hat R$$

$$U = -\int_L \vec E \cdot d\vec l = -\int_{R=a}^{b} \left(\frac{I}{4\pi a \sigma_0 R}\,\hat R\right)\cdot\left(-\hat R\, dR\right)$$

$$= \frac{I}{4\pi a \sigma_0}\ln\left(b/a\right) \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\ln\left(b/a\right)}{4\pi a \sigma_0}$$

(4)

$$\Phi = \int_S \vec B \cdot d\vec s = \int_S (\nabla \times \vec A)\cdot d\vec s = \oint_L \vec A \cdot d\vec l$$



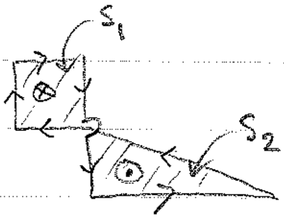
$$\vec A = \hat\varphi\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\sin\theta}{R^2}$$

Endast bidrag från randkurvan som ligger i xy-planet ($\vec A$ vinkelrät mot $d\vec l$ för de andra två randkurvorna)

$$\Phi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\hat\varphi\,\frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi a^2}\right)_{\theta=\pi/2} \cdot \left(\hat\varphi\, a\, d\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi a}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi = \frac{\mu_0 m}{8a}$$

(5) $\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds}$



$$= \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$= \int_{S_1} (\hat{z} B_0 \cos(\omega t)) \cdot (-\hat{z} ds) + \int_{S_2} (\hat{z} B_0 \cos(\omega t)) \cdot (\hat{z} ds)$$

$$= \left\{ \text{area: } S_1 \Rightarrow a^2 \quad \text{och} \quad S_2 \Rightarrow \frac{3}{2} a^2 \right\}$$

$$= \left(-a^2 + \frac{3}{2} a^2\right) B_0 \cos(\omega t) = \frac{a^2}{2} B_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = + \frac{\omega a^2}{2} B_0 \sin(\omega t)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = + \frac{\omega a^2}{2R} B_0 \sin(\omega t)$$

(6) $\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -j\omega\mu_0 \vec{\mathbb{H}}$

$$\vec{\mathbb{H}} = -\frac{\nabla \times \vec{\mathbb{E}}}{j\omega\mu_0} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \mathbb{E}_x(x,z) & 0 & \mathbb{E}_z(x,z) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial x} \right) \hat{y}$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial z} = \cancel{\sqrt{2}}\, \mathbb{E}_0\, j \frac{k}{\cancel{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}} = jk\, \mathbb{E}_0 \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \cancel{\sqrt{2}}\, E_0 \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}} \left(-\frac{jk}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= -jk E_0 \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\, 2jk E_0 \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}}\, \hat{y}$$

$$= \left\{ \frac{k}{\omega\mu_0} = \frac{\cancel{\omega}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\cancel{\omega}\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0} \right\}$$

$$= -\frac{2E_0}{Z_0} \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) e^{-jkx/\sqrt{2}}\, \hat{y}$$

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}\Big|_{z=0} = \left\{ \hat{n} = \hat{z} \right\} = \hat{x}\, \frac{2E_0}{Z_0}\, e^{-jkx/\sqrt{2}}$$