Tentamen i Elektromagnetiska fält

2009-04-16, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2009-04-16 kl 18.30
Resultatet	Anslås vid Linsen 2009-04-24 kl 12.00
Granskning	2009-04-27 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift Endast BETA [redacted] får användas!

1. Visa varför högerledet i Amperes lag, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, från magnetostatiken måste modifieras för att ge en ekvation, som är giltig även under dynamiska förhållanden och att denna blir $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$.

Räkneuppgifter: Hjälpmedel enligt listan på första sidan!

2 Figuren visar en sfärisk kondensator som består av två metallsfärer. Den mindre metallsfären har radien a och är centrerad i den större metallsfären som har radien b där $b > a$. Det medium som finns mellan metallsfärerna har permittiviteten ϵ. Den inre sfären är jordad. Ett batteri med spänningen U kopplas med minuspolen till den inre sfären och med pluspolen till den yttre sfären. Lös följande uppgifter.

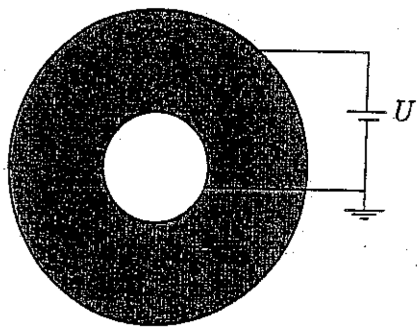
(a) Beräkna den elektriska flödestätheten $\vec{D}(\vec{r})$. (2p)

(b) Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r})$. (1p)

(c) Beräkna den elektriska potentialen $V(\vec{r})$. (3p)

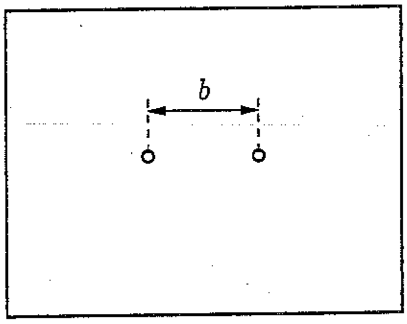
(d) Beräkna den upplagrade laddningen Q. (2p)

(e) Beräkna kapacitansen C för den sfäriska kondensatorn. (2p)



3 Ett sfäriskt metallskal med radien b har en total laddning Q. Centrerat i detta metallskal finns ett annat metallskal med radien a och potentialen noll – radien a är naturligtvis mindre än radien b. Vad är den elektrostatiska energin associerad med detta system? (10p)

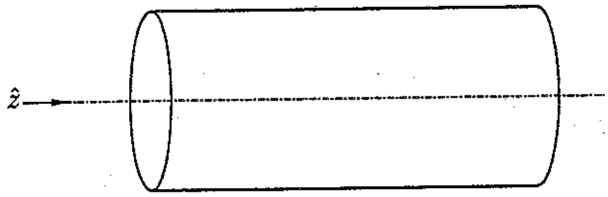
4 Två kopparstavar med cirkulärt tvärsnitt går vinkelrätt genom en stor skiva med tjockleken t och konduktiviteten σ. Kopparstavarna har radien a och det inbördes centrumavståndet $b \gg a$. Kopparstavarna är mycket goda ledare jämfört med skivan. Beräkna resistansen mellan kopparstavarna. (10p)



5 En ledande cirkulär cylinder är tillverkad av ett material med konduktiviteten σ och permeabiliteten μ. Cylindern har radien a och dess axel är parallell med z-axeln så som figuren visar. Genom cylindern går ett homogent magnetfält $\vec{B} = \hat{z}B_0\cos(\omega t)$, vilket genererats av en yttre ström på ett sådant sätt att geometri och fält bara beror av r-koordinaten. Lös följande uppgifter.

(a) Beräkna det tillhörande elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r})$ inuti cylindern där $r < a$. Magnetfältet från de i cylindern inducerade strömmarna kan försummas. (7p)

(b) Beräkna effektutvecklingen per längdenhet P/L inuti cylindern. (3p)



6. Det (komplexa) magnetiska fältet på stort avstånd ($r > R_0$) från en liten loopantenn kan uttryckas i sfäriska koordinater som

$$\vec{H} = -\hat{\theta}A\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta$$

där $A = (ka)^2 I_0/4$ är en konstant.

(a) Använd magnetfältet ovan för att beräkna det motsvarande elektriska fältet i området $r > R_0$. (7p)

(b) Beräkna Poyntingvektorn i området $r > R_0$. (3p)

Elektromagnetiska fält för E2 2009-04-16

② (a) $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{omsl}$ för sfärisk Gaussyta S med radie R

$\Rightarrow 4\pi R^2 D_R(R) = Q_{omsl}$

$R<a \Rightarrow Q_{omsl} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$

$a<R<b \Rightarrow Q_{omsl} = -Q \Rightarrow \vec{D} = -\hat{R}Q/4\pi R^2$

$b<R \Rightarrow Q_{omsl} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$

(b) $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ (där $\epsilon = \epsilon_0$ då $R<a$ & $R>b$)

$R<a \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$a<R<b \Rightarrow \vec{E} = -\hat{R}Q/4\pi\epsilon R^2$

$b<R \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

(c) $V(\vec{r}) = -\int_{L: \to \vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ vilket ger V = konst då $\vec{E} = \vec{0}$

$R<a \Rightarrow V = 0$ (eftersom $V(R=a) = 0$)

$a<R<b \Rightarrow$

$$V = -\int_{\xi=a}^{R} \left(-\hat{R}\frac{Q}{4\pi\epsilon\xi^2}\right)\cdot\left(\hat{R}\,d\xi\right) = \left[\frac{-Q}{4\pi\epsilon\xi}\right]_{\xi=a}^{R}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$$

$$b<R \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

(d) Detta ger att

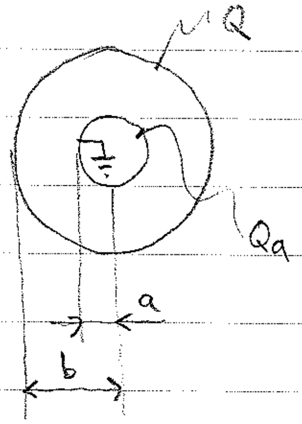
$$Q = \frac{4\pi\epsilon U}{1/a - 1/b}$$

(e) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$$

Fälten uttryckt i batterispänningen blir

	$\vec{D}$	$\vec{E}$	V
$R<a$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	0
$a<R<b$	$-\hat{R}\dfrac{\epsilon U}{(1/a-1/b)R^2}$	$-\hat{R}\dfrac{U}{(1/a-1/b)R^2}$	$\dfrac{1/a-1/R}{1/a-1/b}U$
$b<R$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	U

(3)



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{omsl} \Rightarrow 4\pi R^2 D_R = Q_{omsl}$$

$$R<a \Rightarrow Q_{omsl} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$$

$$a<R<b \Rightarrow Q_{omsl} = Q_a \Rightarrow \vec{D} = \hat{R}\frac{Q_a}{4\pi R^2}$$

$$b<R \Rightarrow Q_{omsl} = Q_a + Q \Rightarrow \vec{D} = \hat{R}\frac{Q_a+Q}{4\pi R^2}$$

Med $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ fås för området $b<R$

$$V = -\int_{L_{\infty\to R}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\xi=R}^{\infty}\left(\hat{R}\frac{Q_a+Q}{4\pi\epsilon_0\xi^2}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right) = \frac{Q_a+Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

med $V_\infty = 0$.

och då $a < R < b$

$$V = -\int_{L_{b\to R}} \vec{E}\cdot\vec{dl} + V(R=b)$$

$$= -\int_{\xi=R}^{b} \left(\hat{R}\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 \xi^2}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right) + \frac{Q_a+Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q_a+Q}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_a}{R}+\frac{Q}{b}\right)$$

Då den inre metallsfären är jordad måste $Q_a = -(a/b)\,Q$. Potentialen på den yttre metallsfären blir

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}\right) = \frac{Q\,(b-a)}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

och den elektrostatiska energin

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2\,(b-a)}{8\pi\epsilon_0 b^2}$$

(4) Potentialen ges av

$$V = \frac{I_0}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_\ominus'|}{|\vec{r}-\vec{r}_\oplus'|}\right)$$

då strömmen I_0 flyter in i ena kopparstaven och ut ur den andra. Potentialerna

$$V_\oplus = \frac{I_0}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad V_\ominus = \frac{I_0}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

ger resistansen

$$R = \frac{V_\oplus - V_\ominus}{I_0} = \frac{\ln(b/a)}{\pi\sigma t}$$

(5) (a) Faradays lag med $\vec{E} = \hat{\varphi} E_\varphi(r)$ (pga symmetri) ger

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \qquad \left(\begin{array}{c} L = \text{cirkulär slinga med} \\ \text{radien } r \end{array}\right)$$

$$2\pi r E_\varphi = -j\omega B_z \pi r^2 \Rightarrow E_\varphi = -j\omega \frac{r}{2} B_0$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{\varphi} E_\varphi e^{j\omega t}\right\} = \hat{\varphi}\,\mathrm{Re}\left\{-j\omega \frac{r}{2} B_0 \left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\right\}$$

$$= \frac{\omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \quad \text{då } r<a$$

(b) Effektutvecklingen ges av

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv = \sigma L \int_S |\vec{E}|^2\,dS$$

$$= \sigma L \int_{r=0}^{a} \left(\frac{\omega B_0 r}{2}\sin(\omega t)\right)^2 2\pi r\,dr$$

$$= \sigma L \frac{\pi\omega^2 B_0^2}{2}\sin^2(\omega t)\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{a}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{L} = \frac{\pi\omega^2 B_0^2 \sigma a^4}{8}\sin^2(\omega t)$$

6 (a) $\vec{H} = -\hat{\theta} A \frac{e^{-jkR}}{R}\sin\theta$ där $A = \frac{(ka)^2 I_0}{4}$

Det elektriska fältet ges av Ampères lag

$$\vec{E} = \frac{\nabla\times\vec{H}}{j\omega\epsilon_0} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\hat{\varphi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R H_\theta\right]$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\hat{\varphi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[-A e^{-jkR}\sin\theta\right]$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\hat{\varphi}\frac{1}{R}\left(-A(-jk)e^{-jkR}\sin\theta\right)$$

$$= \hat{\varphi}\frac{kA}{\omega\epsilon_0}\frac{e^{-jkR}}{R}\sin\theta$$

(b) Poyntingvektorn ges av

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \left(\hat{\varphi} \frac{kA}{\omega \epsilon_0} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta\right) \times \left(-\hat{\theta} A^* \frac{e^{+jkR}}{R} \sin\theta\right)$$

$$= \hat{R} \frac{k|A|^2}{\omega \epsilon_0 R^2} \sin^2\theta$$

och med konstanten A instoppad fås

$$\vec{E} = \hat{\varphi} \frac{k^3 a^2 I_0}{4 \omega \epsilon_0} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta$$

$$\vec{S} = \hat{R} \frac{k^5 a^4 |I_0|^2}{16 \omega \epsilon_0 R^2} \sin^2\theta$$