Tentamen i Elektromagnetiska fält

2008-12-19, kl 8.30-12.30, Hörsalar på Hörsalsvägen – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 9.15 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2008-12-19 kl 12.30
Resultatet	Anslås vid Linsen 2009-01-16 kl 12.00
Granskning	2009-01-19 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

[Hjälpmedel: BETA]

1. Utgå från uttrycket $W_e = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$ för den elektrostatiska energin i ett isolerat system med en potential $V(\vec{r})$ och en i rummet begränsad laddningsfördelning $\rho(\vec{r})$. Visa att denna energi kan skrivas som en integral över en elektrisk energitäthet $w_e(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r})$!

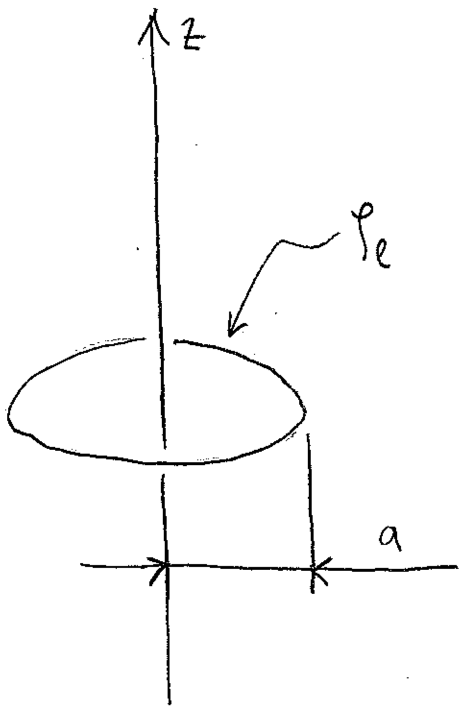
   Ledning: Använd vektorformel för $\nabla \cdot (f\vec{A})$!

Räkneuppgifter:

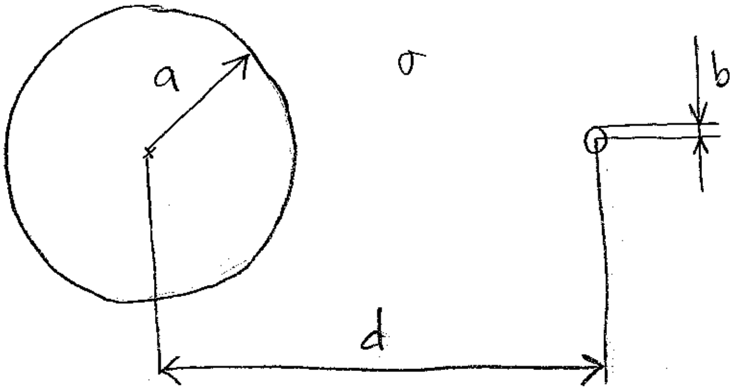
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

2. En en linjeladdning med den konstanta linjeladdningstätheten ρ_l är formad till en cirkel med radien a. Den är placerad med cirkelns centrum i origo och orienterad så att linjeladdningen ligger i planet $z = 0$. Beräkna det elektriska fältet längs z-axeln.

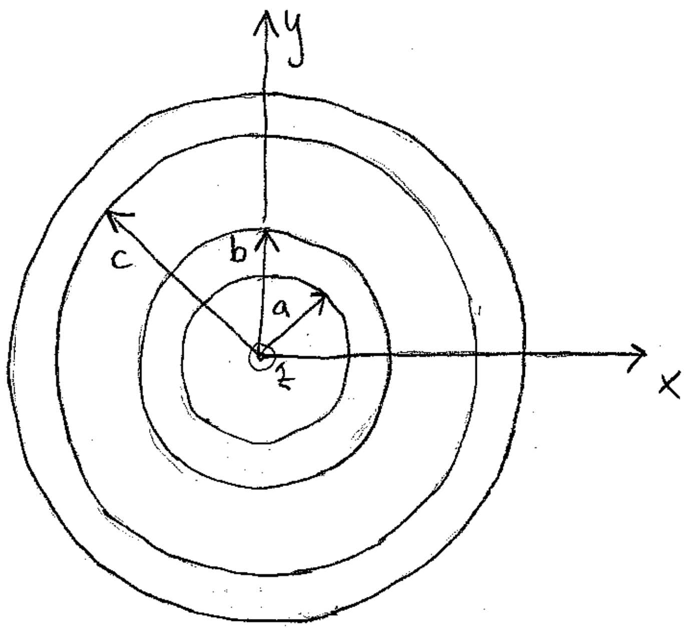
   Obs! Denna uppgift är hämtad från exempelsamlingen.



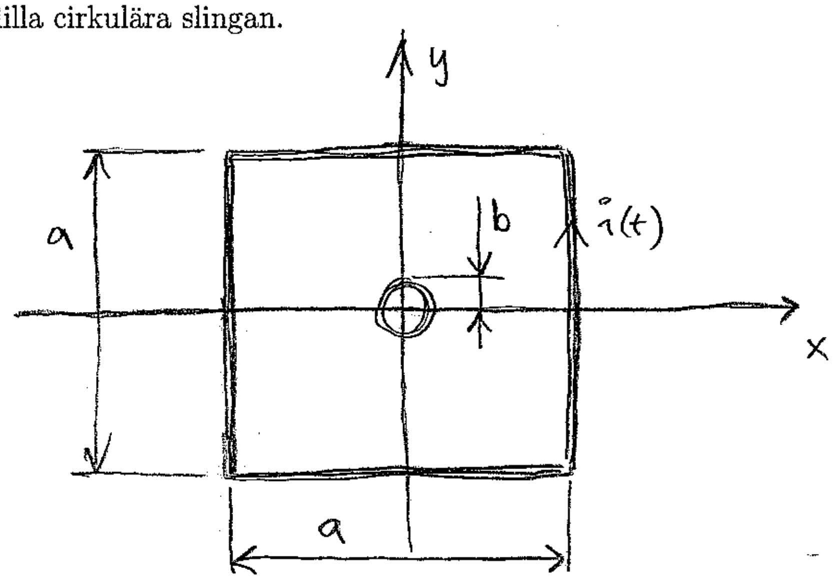
3. Ett metallrör med radien a ligger i en ledande vätska med konduktiviteten σ. Parallelt med röret finns en tunn metalltråd med radien $b \ll a$. Både röret och tråden har längden L, vilken är mycket större än både a och b. Avståndet mellan rörets cylinderaxel och tråden är d. Beräkna resistansen mellan röret och tråden.



4. En mycket lång koaxialkabel består av två rör. Röret som fungerar som innerledare har innerradien a och ytterradien b. Röret som fungerar som ytterledare har innerradien c. Beräkna det magnetiska fältet för $r < c$ då innerledaren för likströmmen I i z-axelns riktning och ytterledaren för samma ström i motsatt riktning.



5. En kvadratisk slinga med sidan a för strömmen $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. Vinkelfrekvensen ω är låg i sammanhanget vilket innebär att problemet är kvasistationärt. En mycket liten cirkulär slinga med radien $b \ll a$ och resistansen R är placerad i kvadratens mittpunkt. Båda slingorna ligger i samma plan. Beräkna den inducerade strömmen i den lilla cirkulära slingan.



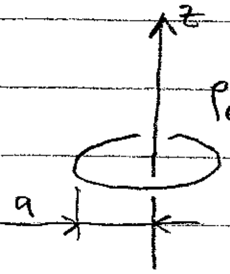
6. En resonator är konstruerad genom att kortsluta en koaxkabel i båda ändarna med hjälp av två metall plattor. Den ena änden sammanfaller med $z = 0$ och den andra med $z = d$. Koaxialkabelns innerradie är a och dess ytterradie b. Det elektriska fältet i resonatorn ges av

$$\vec{E} = \hat{r}\frac{A_0}{r}\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\cos(\omega t)$$

uttryckt i cylindriska koordinater där A_0 är en konstant amplitud. Beräkna det tillhörande magnetiska fältet.

Elektromagnetiska fält EEM015 – 2008.12.19

②



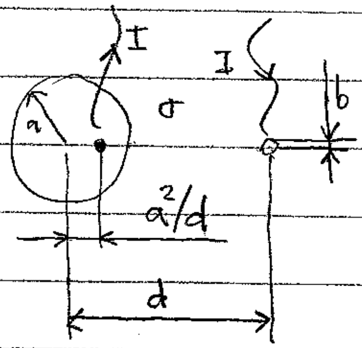
$$\vec{r}' = \hat{r}a$$
$$\vec{r} = \hat{z}z$$
$$\vec{r}-\vec{r}' = -\hat{r}a + \hat{z}z$$
$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\rho_e}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho_e}{\sqrt{a^2+z^2}}\,a\,d\varphi$$

$$= \frac{\rho_e a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho_e a}{2\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = \hat{z}\frac{\rho_e a z}{2\epsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

③



$$V(\vec{r}) = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'_\ominus|}{|\vec{r}-\vec{r}'_\oplus|}\right)$$

$$V_\ominus = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{a-a^2/d}{d-a}\right)$$

$$V_\oplus = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{d-a^2/d}{b}\right)$$

$$U = V_\oplus - V_\ominus = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{d-a^2/d}{b}\cdot\frac{d-a}{a-a^2/d}\right)$$

$$= \frac{I/L}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{d^2-a^2}{ab}\right)$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln\left(\frac{d^2-a^2}{ab}\right)$$

(4) $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{innesl}$ med $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi(r)$ och integrationskontur L formad som cirkel med radien r:

$$\oint_L \left(\hat{\varphi} H_\varphi(r)\right)\cdot\left(\hat{\varphi}\, r\, d\varphi\right) = 2\pi r\, H_\varphi(r) = I_{innesl}$$

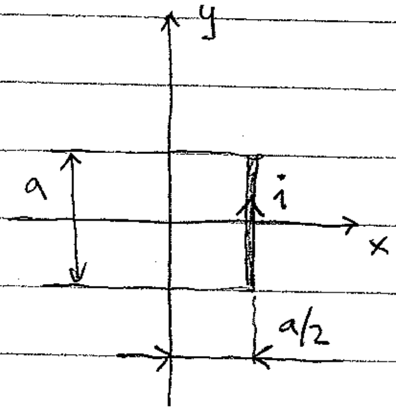
Tre fall för $I_{innesl} = \int_S \vec{J}_v \cdot d\vec{s}$:

$$I_{innesl} = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad r<a \\ \dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2} I & \text{då} \quad a<r<b \\ I & \text{då} \quad b<r<c \end{cases}$$

ger

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{0} & \text{då} \quad r<a \\ \hat{\varphi} \dfrac{I}{2\pi r} \dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2} & \text{då} \quad a<r<b \\ \hat{\varphi} \dfrac{I}{2\pi r} & \text{då} \quad b<r<c \end{cases}$$

(5)



$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r}\,' = \hat{x}\,a/2 + \hat{y}\,y'$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -\hat{x}\,a/2 - \hat{y}\,y'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(a/2)^2 + (y')^2}$$

$$\vec{B}_{1/4}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{i}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dl'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{y'=-a/2}^{a/2} \frac{i\,\hat{y} \times \left(-\hat{x}\,a/2 - \hat{y}\,y'\right)}{\left[(a/2)^2 + (y')^2\right]^{3/2}}\, dy'$$

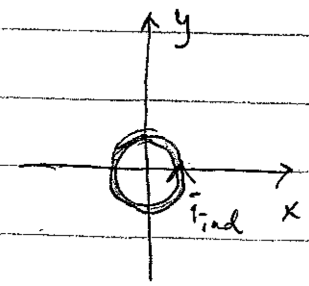
$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 i a}{8\pi} \int_{y'=-a/2}^{a/2} \frac{dy'}{\left[(a/2)^2 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 i a}{8\pi} \left[\frac{y'}{(a/2)^2 \sqrt{(a/2)^2 + (y')^2}} \right]_{y'=-a/2}^{a/2}$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{\sqrt{2}\,\pi a}$$

$$\vec{B}_{tot}(\vec{r}) = 4\,\vec{B}_{1/4}(\vec{r}) = \hat{z}\,\frac{4\mu_0 i_0}{\sqrt{2}\,\pi a} \cos(\omega t)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}_{tot} \cdot \vec{ds} \cong \frac{4\mu_0 i_0 \cos(\omega t)}{\sqrt{2}\,\cancel{\pi} a}\, \cancel{\pi} b^2$$



$$\mathcal{V} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{4b^2\mu_0 i_0 \sin(\omega t)\,\omega}{\sqrt{2}\,a}$$

$$i_{ind} = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{4b^2\mu_0 i_0 \omega}{\sqrt{2}\,a R} \sin(\omega t)$$

(b) $\vec{E} = \hat{r} \frac{A_0}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \vec{\mathbb{E}} = \hat{r} \frac{A_0}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbb{H}} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \nabla \times \vec{\mathbb{E}} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \hat{\varphi} \frac{\partial \mathbb{E}_r}{\partial z}$$

$$= +j \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{A_0}{r} \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbb{H}} e^{j\omega t} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \hat{\varphi}\, j \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{A_0}{r} \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] \right\}$$

$$= -\hat{\varphi} \frac{A_0 \pi}{\omega\mu_0 r d} \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \sin(\omega t)$$