Tentamen i Elektromagnetiska fält

2008-08-19, kl 8.30-12.30, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 9.15 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2008-08-19 kl 12.30
Resultatet	Anslås vid Linsen 2008-08-29 kl 12.00
Granskning	2008-09-03 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2007) får användas för uppgift 2. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

$\boxed{\text{OBS! Tvådelad tentamen!}}$

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

1. Definiera den makroskopiska strömtätheten $\vec{J}$. Härled ur den elektriska laddningens oförstörbarhet den s.k. kontinuitetsekvationen, $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial\rho/\partial t$!

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

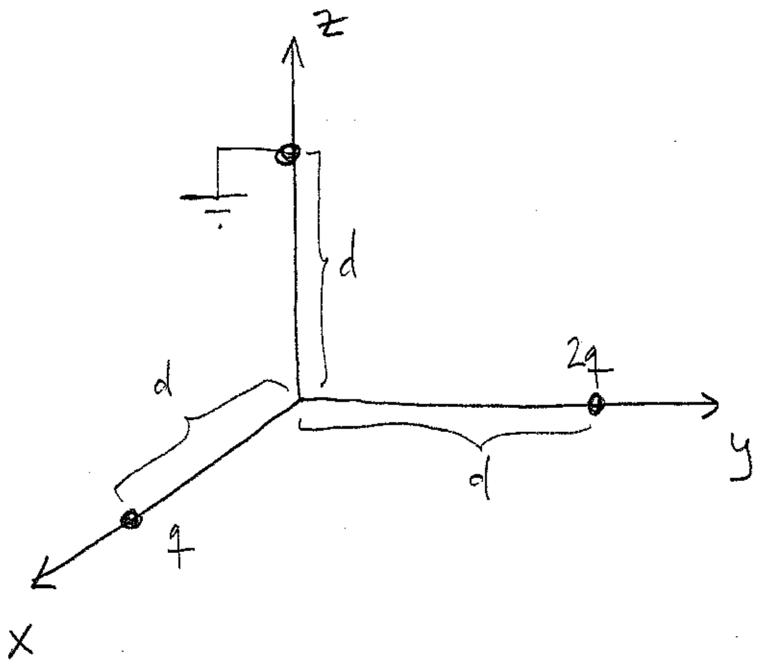
2. En punktladdning q befinner sig i origo. Beräkna den elektriska fluxen

$$\Psi = \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

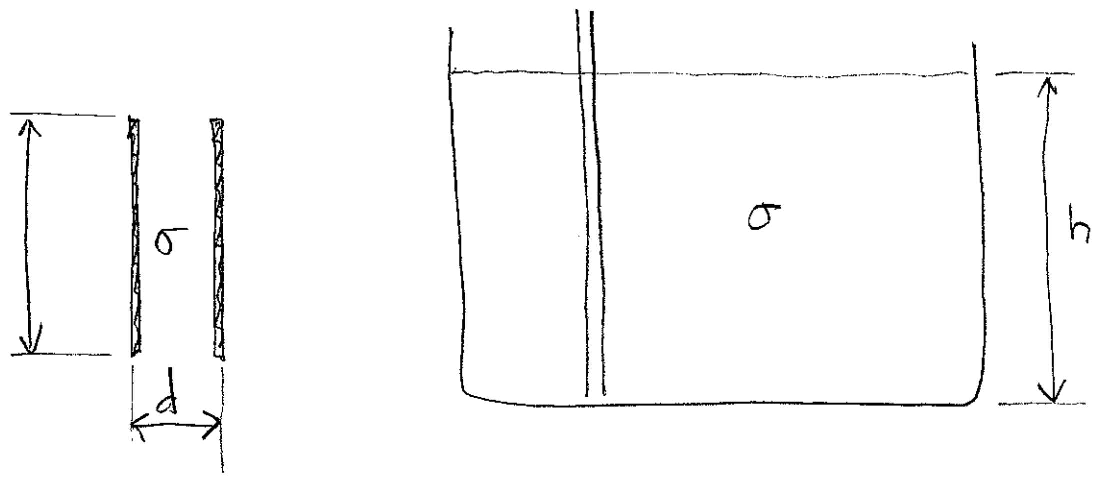
genom ytan S, som är kvadratisk och sina hörn i punkterna $(a,0,0)$, $(a,a,0)$, (a,a,a) och $(a,0,a)$.

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.

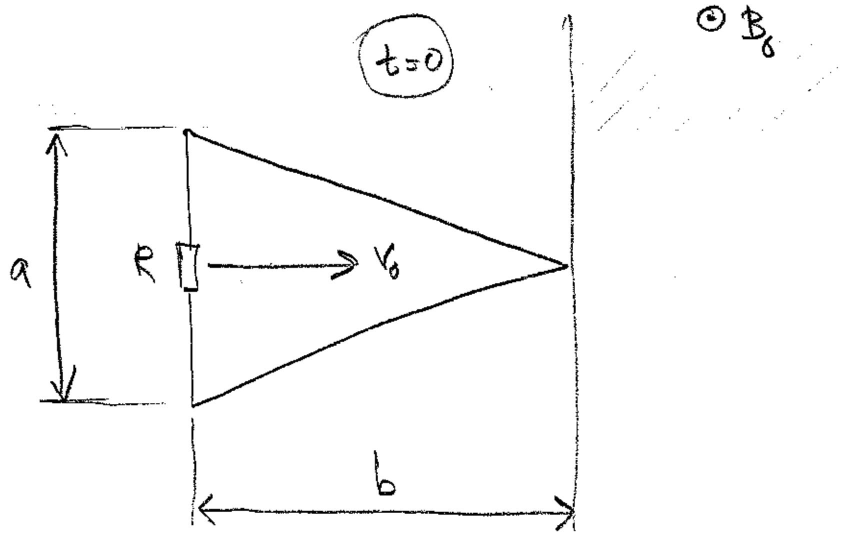
3. En liten metallkula med radien a och laddningen q är placerad i punkten $(d,0,0)$ enligt figuren där $a \ll d$. Ytterligare en liten metallkula med samma radie och dubbelt så stor laddning är placerad i punkten $(0,d,0)$. En tredje metallkula med radien a är jordad och placerad i punkten $(0,0,d)$. Beräkna den laddning som finns på den jordad metallkulan.



4. En rätblocksformad tank är tillverkad av ett elektriskt isolatormaterial och den innehåller en ledande vätska med konduktiviteten σ. En nivåmätare konstrueras med hjälp av två likadana och parallella metallband med ett tvärsnitt enligt figuren nedan. Metallbandens bredd är b och dess inbördes avstånd d, där $d \ll b$. Metallbanden sticks ner i vätskan vinkelrät mot dess yta. Metallbanden är på stort avstånd från tankens väggar och de når ner till tankens botten. Beräkna vätskans djup h då den uppmätta resistansen R mellan metallbanden är given.



5. En triangelformad ledande tråd är kopplad till ett motstånd med resistansen R. Figuren nedan visar slingan och dess mått då den befinner sig intill ett område med en konstant magnetisk flödestäthet vid $t = 0$. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i slingan då den flyttas med den konstanta hastigheten v_0 in i området med den magnetiska flödestätheten. (Det går bra att bortse från slingans självinduktans.)



6. En stor metallskiva sammanfaller med planet $z = 0$. En annan likadan metallskiva sammanfaller med planet $z = h$. Området $0 < z < h$ upptas av luft. Mellan metallskivorna finns det elektriska fältet

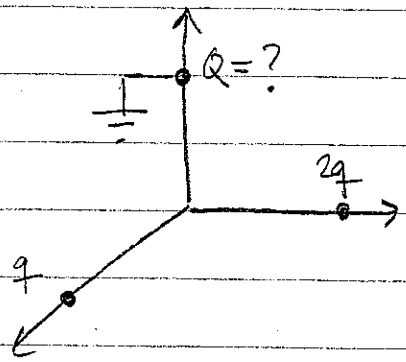
$$\vec{E} = \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \exp(-jkx).$$

Beräkna tidsmedelvärdet av Poyntings vektor mellan metallskivorna.

EEM015 – elektromagnetiska fält – 2008.08.19

(2) Se lösning till exempelsamlingen

(3)

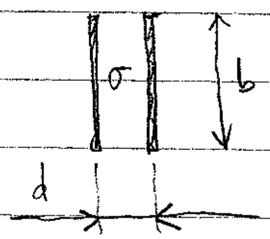


Potentialen på kulan som är placerad i $(0,0,a)$ är

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{\sqrt{2}d} + \frac{2q}{\sqrt{2}d}\right)$$

vilket ger att $Q = -3qa/\sqrt{2}d$ är laddningen på den jordade kulan. $(V=0)$

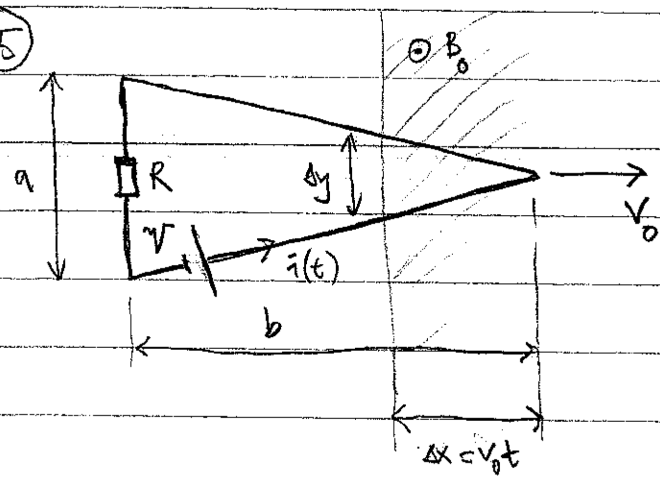
(4)



Kanteffekter försummas då $d \ll b$. Resistansen blir (full poäng kräver korrekt uträkning av detta resultat)

$$R = \frac{d}{\sigma b h} \Rightarrow h = \frac{d}{\sigma b R}$$

(5)



Spetsen är vid $x=0$ då $t=0$ vilket ger (likformiga trianglar)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a}{b} \Rightarrow \Delta y = \frac{a v_0 t}{b}$$

$$\text{area} = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y = \frac{a}{2b}(v_0 t)^2$$

$$\phi(t) = \int_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \frac{B_0 a}{2b}(v_0 t)^2$$

$$\mathcal{V} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B_0 a v_0^2}{b}\, t$$

$$i(t) = \begin{cases} -\dfrac{B_0 a v_0^2}{bR}\, t & \text{då } 0 < t < b/v_0 \\ 0 & \text{då } t > b/v_0 \end{cases}$$

(6) Enligt Faradays lag är

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu_0}\left(-\hat{x}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{E_0}{-j\omega\mu_0}\left(-\hat{x}\frac{\pi}{h}\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) - \hat{z}\, jk \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) e^{-jkx}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \left[\hat{y}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)e^{-jkx}\right] \times \left[\left(\hat{x}\underbrace{(\dots)}_{\text{något imaginärt}} + \hat{z}\frac{k}{\omega\mu_0}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)e^{-jkx}\right]^* |E_0|^2$$

$$= \left(\hat{z}\underbrace{(\dots)}_{\text{något imaginärt}} + \hat{x}\frac{k}{\omega\mu_0}\sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right)|E_0|^2$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{S}\right\} = \hat{x}\frac{|E_0|^2 k}{2\omega\mu_0}\sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$