Tentamen i Elektromagnetiska fält

2008-03-27, kl 14.00-18.00, "Väg och vatten"-salar – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	cirka 14.45 och 16.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2008-03-27 kl 18.00
Resultatet	Anslås vid Linsen 2008-04-10 kl 12.00
Granskning	2008-04-14 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Bonuspoäng (från höstterminen 2007) får användas för uppgift 5. Max 10p per uppgift.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

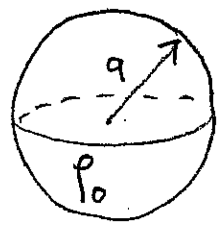
OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

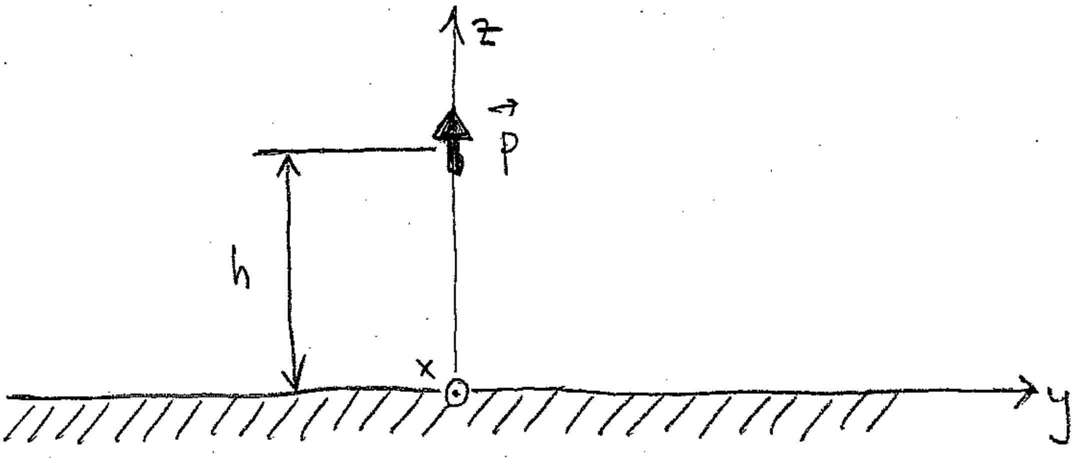
1. Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord!
   (a) Gradienten
   (b) Divergensen
   (c) Rotationen

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

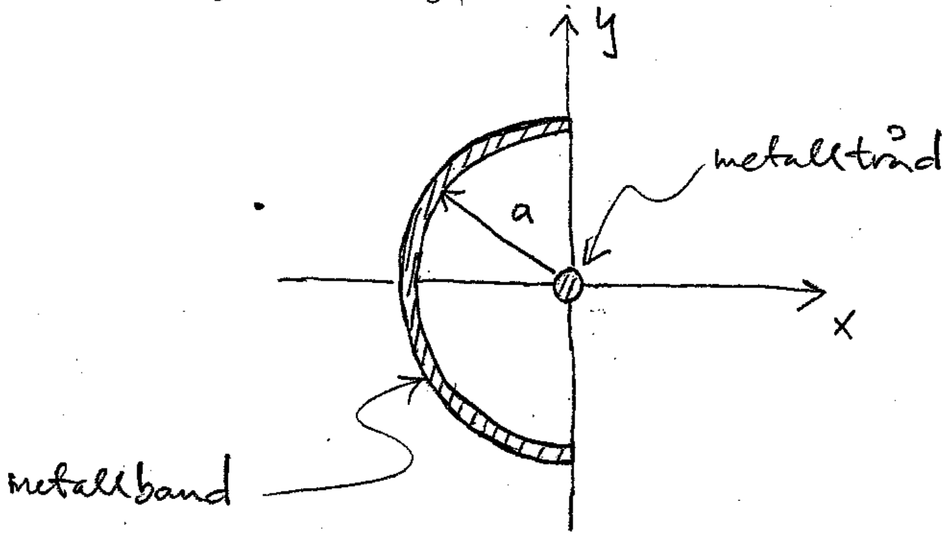
2. I ett klotformat område med radien a finns en konstant rymdladdningstäthet ρ_0. Beräkna den elektriska potentialen överallt.



3. En oändligt stor metallskiva sammanfaller med planet $z = 0$. En elektrisk dipol är placerad på z-axeln i punkten $z = h > 0$ och dess dipolmoment är givet av $\vec{p} = \hat{z}p_0$. Beräkna den inducerade ytladdning på metallskivan och uttryck rumsberoendet endast med hjälp av avståndet till origo.



4. Ett oändligt långt metallband har formats så att dess tvärsnitt blir en halvcirkel med radien a enligt figuren nedan. Metallbandet för den totala likströmmen I i negativ z-riktning. Beräkna den magnetiska kraften per längdenhet på en tunn metalltråd som sammanfaller med z-axeln och fungerar som återledare genom att föra strömmen I i positiv z-riktning.

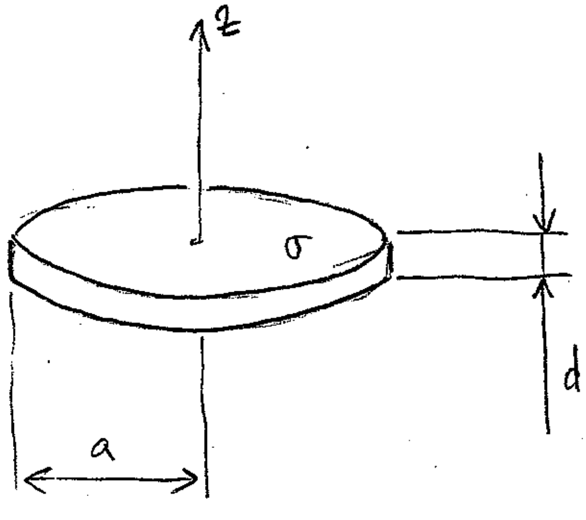


5. En tunn cirkulär metallskiva placeras med sin rotationssymmetriaxel längs z-axeln i ett i tiden sinusformigt varierande homogent magnetfält

$$\vec{B}(t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t)$$

Skivan har ledningsförmågan σ, radien a och tjockleken d. Beräkna den inducerade virvelströmstätheten $\vec{J}(\vec{r}, t)$ i skivan! Antag att magnetfältet från de inducerade virvelströmmarna kan försummas vid beräkningen!

Obs! Denna uppgift är hämtad från listan över räkneproblem i kurs-PM.



6. Två oändligt stora metallskivor sammanfaller med planen $x = 0$ och $x = L$. I området mellan skivorna kan det elektriska fältet i frekvensplanet skrivas på formen

$$\vec{E} = \hat{z}\boldsymbol{E}_0(e^{-jkx} + \xi e^{+jkx})$$

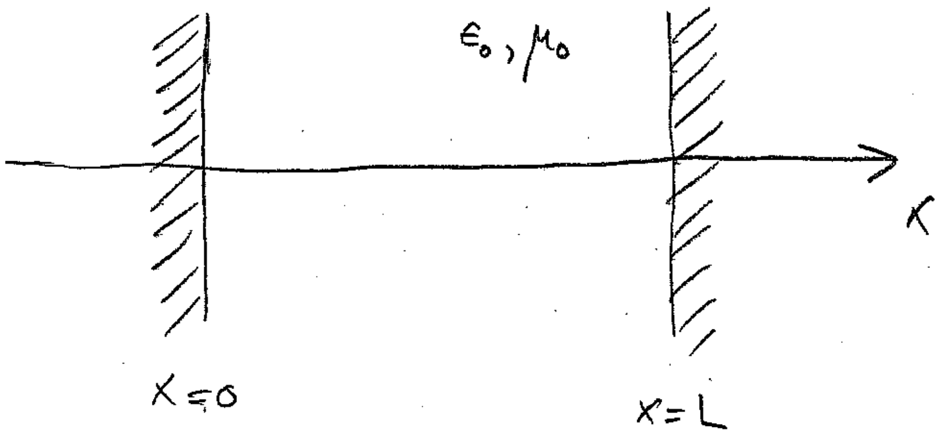
där $\boldsymbol{E}_0$ är en känd konstant. I området mellan plattorna är permittiviteten ϵ_0 och permeabiliteten μ_0.

(a) Beräkna ett värde för konstanten ξ så att randvillkoret för $x = 0$ är uppfyllt.

(b) Beräkna de vågtal k som gör att randvillkoret för $x = L$ är uppfyllt.

(c) Beräkna de vinkelfrekvenser ω som beskriver det elektriska fältets tidsvariation, baserat på resultaten från (a) och (b), genom att använda vågekvationen

$$-\frac{d^2E_z}{dx^2} = \omega^2\epsilon_0\mu_0E_z$$



Lösningsförslag EEM015 2008.3.27

② Sfärisk symmetri och Gauss lag ger

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sfärisk Gaussyta } S \text{ med radie } R \\ \vec{E} = \hat{R} E_R(R) \end{array} \right\}$$

$$= 4\pi R^2 E_R(R) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \, dv$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi R^3}{\epsilon_0 3} \rho_0 & \text{om } R<a \\[2ex] \dfrac{4\pi a^3}{\epsilon_0 3} \rho_0 & \text{om } R>a \end{cases}$$

$$E_R(R) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} & \text{om } R>a \quad (\text{område II}) \\[2ex] \dfrac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 R^2} & \text{om } R>a \quad (\text{område I}) \end{cases}$$

Potentialen då $R > a$ (område I)

$$V^{\mathrm{I}}(R) = -\int_{L_{\infty \to R}} \vec{E}^{\mathrm{I}} \cdot d\vec{l} = -\int_{\xi=R}^{\infty} \left(\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 \xi^2} \hat{R} \right) \cdot \left(-\hat{R} \, d\xi \right)$$

$$= \int_{\xi=R}^{\infty} \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 \xi^2} \, d\xi = \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\xi} \right]_{\xi=R}^{\infty} = \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 R}$$

Potentialen då $R<a$ (område II)

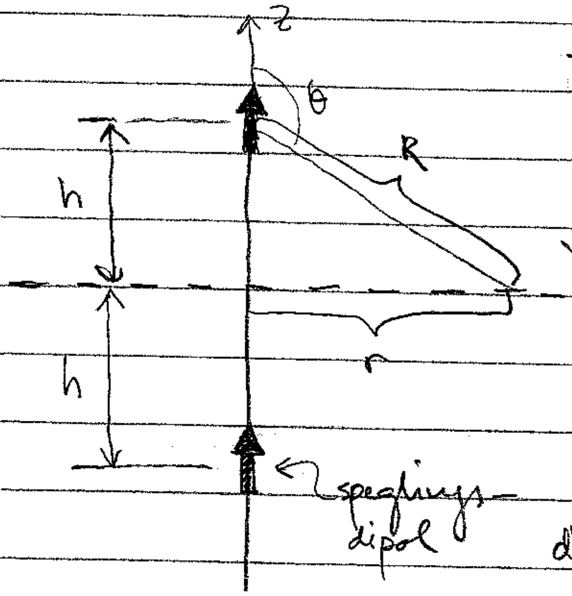
$$V^{(II)}(R) = V^{(I)}(a) - \int_{L_{a\to R}} \vec{E}^{(II)} \cdot \vec{dl}$$

$$= \frac{a^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \int_{\xi=R}^{a} \left(\frac{\rho_0 \xi}{3\epsilon_0}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}d\xi\right)$$

$$= \frac{a^2\rho_0}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_{\xi=R}^{a}$$

$$= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(a^2 + \frac{a^2-R^2}{2}\right) = \frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{R^2}{3a^2}\right)$$

3



$$\vec{E} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

Ytladdningen ges av

$$\rho_s = \epsilon_0 \hat{n}\cdot\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_s\right)$$

där $\vec{E}_0$ pga originaldipol och $\vec{E}_s$ pga speglingsdipol.

$$\rho_s = 2\epsilon_0 \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{z}\cdot\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$= \frac{p_0}{2\pi R^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

Använd sambanden $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
och $\cos^2\theta = [-\cos(\pi-\theta)]^2 = (-h/R)^2$

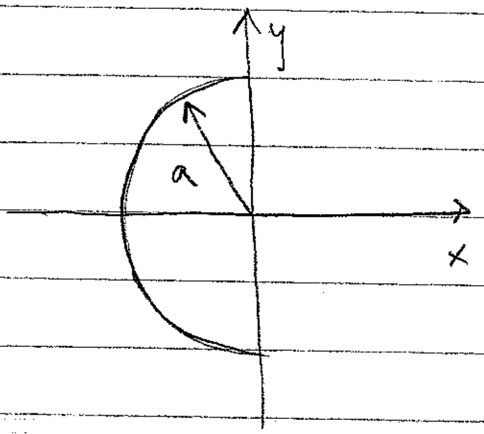
$$\rho_s = \frac{p_0}{2\pi R^3}\left(2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta\right)$$

$$= \frac{p_0}{2\pi R^3}\left(\frac{3h^2}{R^2} - 1\right) = \frac{p_0}{2\pi R^3}\,\frac{3h^2 - R^2}{R^2}$$

där $R^2 = h^2 + r^2$ vilket ger

$$\rho_s(r) = \frac{p_0}{2\pi}\,\frac{2h^2 - r^2}{(h^2 + r^2)^{5/2}}$$

4



Magnetisk flödestäthet från rak tråd fås från Ampères lag med $\vec{B} = \hat{\varphi} B_\varphi(r)$ pga symmetri

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 i$$

Och motsvarande resultat för tråd placerad i punkten $\vec{r}' = \hat{x}x' + \hat{y}y'$ är

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}\,\frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Här har man $\vec{r} = \vec{0}$ och $\vec{r}' = \hat{r}(\varphi')a$ vilket ger

$$\vec{r} - \vec{r}' = -a(\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi')$$
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = a$$

och tillsammans med $i = -I\, a\, d\varphi'/(\pi a)$ får man

$$\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{-\mu_0 I}{2\pi^2} \int_{\varphi'=\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\hat{z} \times \left[-a(\hat{x}\cos\varphi' + \hat{y}\sin\varphi')\right]}{a^2} d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a} \int_{\varphi'=\pi/2}^{3\pi/2} (\hat{y}\cos\varphi' - \hat{x}\sin\varphi')\, d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a} \left(\hat{y} \underbrace{\left[\sin\varphi'\right]_{\varphi'=\pi/2}^{3\pi/2}}_{=-2} + \hat{x} \underbrace{\left[\cos\varphi'\right]_{\varphi'=\pi/2}^{3\pi/2}}_{=0} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{\pi^2 a} \hat{y}$$

$$\vec{F} = \int_L d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{z=0}^{L} (\hat{z} I\, dz) \times \left(-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 a} \hat{y} \right)$$

$$= L \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 a} \hat{x} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 a} \hat{x}$$

(kraft per längdenhet)

(5) Se lösningsförslag till exempelsamlingen

(6) Randvillkor på metallytan är $\hat{n} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$x = 0 \Rightarrow \hat{x} \times \vec{E}(x=0) = \hat{x} \times \hat{z} E_0 (1 + \xi) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 1 + \xi = 0 \Rightarrow \xi = -1$$

Alltså blir $\vec{E} = \hat{z} E_0 \left(e^{-jkx} - e^{+jkx} \right)$.

$$x = L \Rightarrow -\hat{x} \times \vec{E}(x=L) = -\hat{x} \times \hat{z} E_0 \left(e^{-jkL} - e^{+jkL} \right)$$

$$= \hat{y} E_0 \left(\cos(kL) - j\sin(kL) - \cos(kL) - j\sin(kL) \right)$$

$$= -\hat{y}\, 2j E_0 \sin(kL) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = n\pi / L$$

där n = heltal

Till sist blir de sökta vinkelfrekvenserna

$$-\frac{d^2 E_z}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\left(-E_0 2j \sin(kx) \right) = -E_0 2j k^2 \sin(kx)$$

$$= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_z = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left(-E_0 2j \sin(kx) \right)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{n\pi}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} L} \quad \text{där } n = \text{heltal}$$