Tentamen i Elektromagnetiska fält

2007-08-27, kl 08.30-12.30, lokal hus M – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	09.00 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1724 Per Jacobsson, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2007-08-27 kl 13.00
Resultatet	Anslås vid Linsen 2007-09-06 kl 12.00
Granskning	2007-09-12 kl 12.00-13.00 2007-09-13 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2006) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift

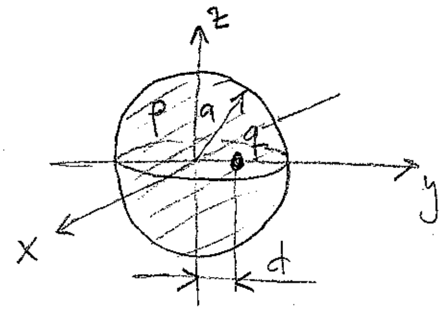
[Hjälpmedel: BETA]

1. Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord!
   a) Gradienten, b) Divergensen, c) Rotationen

Räkneuppgifter:

[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

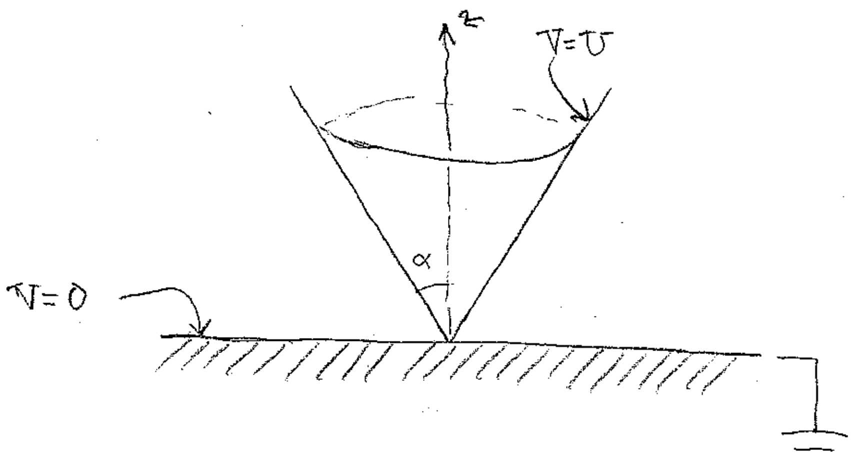
2. En punktladdning q är placerad på avståndet d från mittpunkten av ett klot med radien a och den homogena rymdladdningen $\rho = -3q/(4\pi a^3)$. Figuren nedan visar punktladdningen, klotet och deras relativa placeringen. Beräkna den elektrostatiska kraften mellan klotet och punktladdningen.



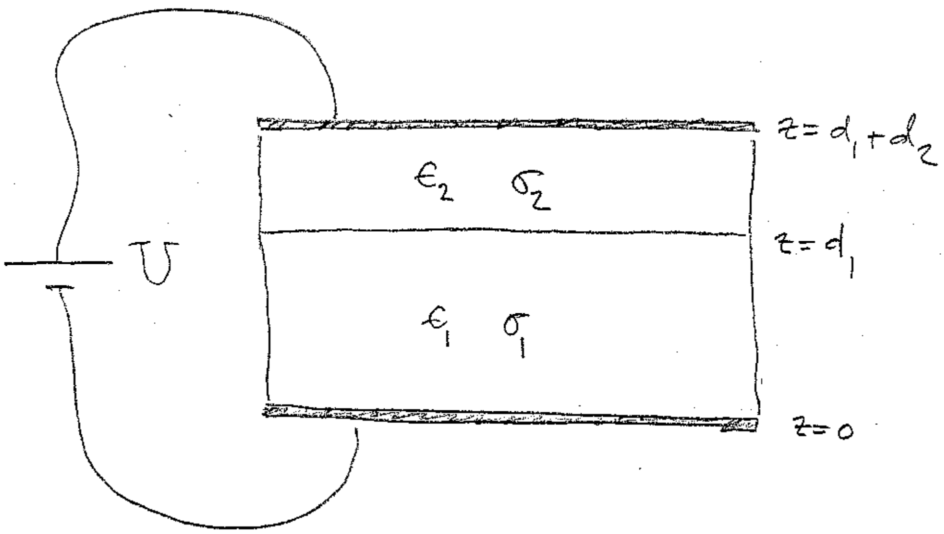
3. En metallkon är placerad intill ett jordplan enligt figuren nedan. Ett batteri med spänningen U är inkopplat mellan konen och jordplanet, så att konen har potentialen U eftersom jordplanet har potentialen noll. Potentialfältet i sfäriska koordinater blir då

$$V = U \frac{\ln(\tan(\theta/2))}{\ln(\tan(\alpha/2))}$$

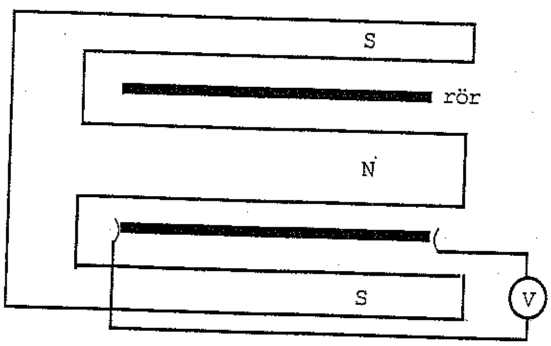
där halva öppningsvinkeln för konen betecknas α. Man kan ganska enkelt undersöka att jordplanets yta $(\theta = \pi/2)$ ger $V = 0$. Potentialen på konens yta $(\theta = \alpha)$ blir $V = U$ och dessutom uppfyller potentialfätet Laplace ekvation $\nabla \cdot \nabla V = 0$. Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}$ i området mellan metallkonen och jordplanet.

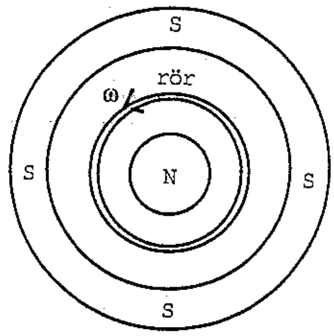


4. En ledande dielektrisk platta har tvärsnittsarean A, tjockleken d_1, permittiviteten ϵ_1 och konduktiviteten σ_1. En annan ledande dielektrisk platta har samma tvärsnitt men i övrigt tjockleken d_2, permittiviteten ϵ_2 och konduktiviteten σ_2. De två plattorna är placerade enligt figuren nedan och ett batteri med spänningen U är inkopplat (mellan metallbleck placerade vid $z = 0$ och $z = d_1 + d_2$) så att det flyter en homogen ström genom båda plattorna. Beräkna följande ytladdningar: ρ_{s0} på det undre metallblecket där $z = 0$; ρ_{s1} på gränsytan $z = d_1$ mellan de två plattorna; och ρ_{s2} på det övre metallblecket där $z = d_1 + d_2$.



5. I en unipolarmaskin är magnetpolerna utbildade till koaxiella järncylindrar, mellan vilka ett axiellt styrt kopparrör kan rotera. Det magnetiska flödet mellan polerna är $\Phi = 0{,}25$ Wb. Hur många varv per minut skall kopparröret göra, för att en spänning $U = 10$ V skall induceras mellan dess ändar?

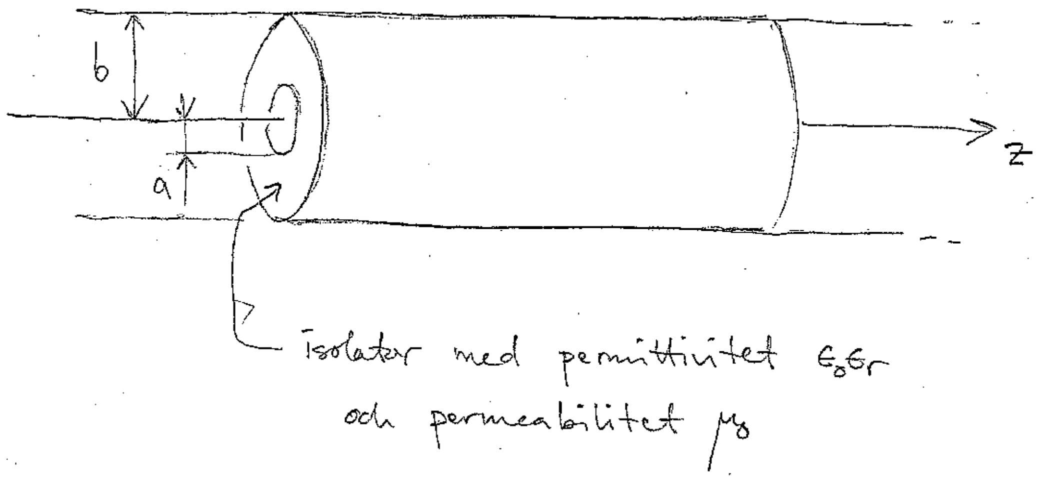




6. En koaxialkabel har en innerledare med radien a och en ytterledare med radien $b > a$. Koaxialkabelns rotationsaxel sammanfaller med z-axeln i ett cylindriskt koordinatsystem. Mellan inner- och ytterledare finns det elektriska fältet

$$\vec{E} = \hat{r}\frac{U_0}{r\ln(b/a)}\cos(\omega t - kz)$$

uttryckt i cylindriska koordinater. Beräkna tidsmedelvärdet av den aktiva effekt som denna kabel transporterar längs z-axeln.



(2) Gauss lag $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{inne}$ ger för det laddade klotet (då symmetrin $\vec{E} = \hat{R}E_R(R)$ används)

$$R \le a : \quad \epsilon_0 E_R 4\pi R^2 = \rho \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow E_R = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} R$$

$$R > a : \quad \epsilon_0 E_R 4\pi R^2 = \rho \frac{4\pi a^3}{3} = -q \Rightarrow E_R = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Kraften mellan punktladdningen och klotet är attraherande (punktladdningen strävar mot klotets mittpunkt) och dess storlek ges av

$$F = \begin{cases} \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} R & R \le a \\[2ex] \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} & R > a \end{cases}$$

(3) Det elektriska fältet ges av

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[U\frac{\ln(\tan(\theta/2))}{\ln(\tan(\alpha/2))}\right]$$

$$= -\hat{\theta}\frac{U}{R\ln(\tan(\alpha/2))}\frac{1}{\tan(\theta/2)}\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\frac{1}{2}$$

$$= -\hat{\theta}\frac{U}{R\ln(\tan(\alpha/2))}\frac{1}{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)}$$

$$= -\hat{\theta}\frac{U}{R\ln(\tan(\alpha/2))\sin(\theta)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{kontroll}\\ \nabla\cdot\vec{E} = 0\end{array}\right)$$

(4) $\vec{J} = -\hat{z}J \Rightarrow \vec{E}_1 = -\hat{z}J/\sigma_1$ och $\vec{E}_2 = -\hat{z}J/\sigma_2$

$$U = -\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{d_1} (-\hat{z}J/\sigma_1)\cdot(\hat{z}dz) - \int_{d_1}^{d_1+d_2} (-\hat{z}J/\sigma_2)\cdot(\hat{z}dz)$$

$$= \frac{Jd_1}{\sigma_1} + \frac{Jd_2}{\sigma_2} \Rightarrow J = \frac{U}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1\vec{E}_1 = -\hat{z}\frac{\epsilon_1 U/\sigma_1}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2\vec{E}_1 = -\hat{z}\frac{\epsilon_2 U/\sigma_2}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}$$

$$\rho_{s0} = \hat{z}\cdot\vec{D}_1 = -\frac{\epsilon_1/\sigma_1}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}U$$

$$\rho_{s1} = \hat{z}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \frac{\epsilon_1/\sigma_1 - \epsilon_2/\sigma_2}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}U$$

$$\rho_{s2} = -\hat{z}\cdot\vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2/\sigma_2}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}U$$

(kontroll $\rho_{s0} + \rho_{s1} + \rho_{s2} = 0$)

(5) se lösning på kursens hemsida

(b) Faradays lag ger

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu}\hat{\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu}\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{U_0}{r\ln(b/a)}e^{-jkz}\right]$$

$$= \hat{\varphi}\frac{k}{\omega\mu}\frac{U_0}{r\ln(b/a)}e^{-jkz}$$

Poyntings vektor blir

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\left(\hat{r}\frac{U_0 e^{-jkz}}{r\ln(b/a)}\right)\times\left(\hat{\varphi}\frac{k}{\omega\mu}\frac{U_0 e^{-jkz}}{r\ln(b/a)}\right)^*$$

$$= \frac{k}{2\omega\mu}\frac{U_0^2}{r^2\ln^2(b/a)}\hat{z}$$

vilket ger den aktiva effekten

$$P = \int_{r=a}^{b} \mathrm{Re}\{\vec{S}\}\cdot\hat{z}\,2\pi r\,dr = \frac{2\pi k}{2\omega\mu}\frac{U_0^2}{\ln^2(b/a)}\int_{r=a}^{b}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\pi k}{\omega\mu}\frac{U_0^2}{\ln(b/a)}$$