Tentamen i Elektromagnetiska fält

2007-04-14, kl 14.00-18.00, lokal hus V – kurskod EEM 015

Hjälpmedel – teori	BETA
Hjälpmedel – räkneproblem	BETA, typgodkänd kalkylator, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori *utan* egna anteckningar
Besök	14.30 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Signaler och system
Lösningar	Anslås vid Linsen 2007-04-14 kl 18.30
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2007-04-23 kl 12.00
Granskning	2007-04-25 kl 12.00-13.00 2007-04-26 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2006) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

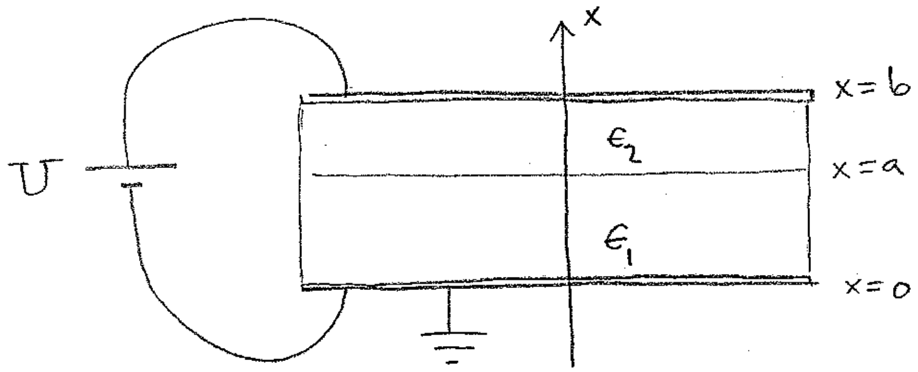
OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift
[Hjälpmedel: BETA]

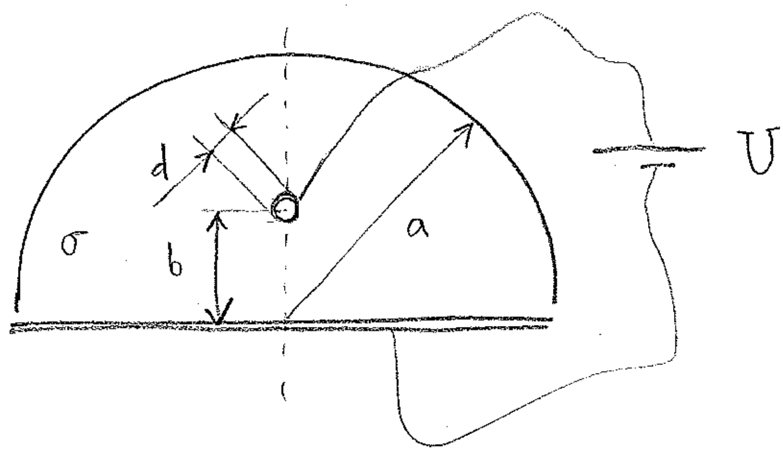
1. Utgå från Gauss lag för E-fältet i vakuum och $\rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$, där ρ_p är polarisationsladdningstätheten och $\vec{P}$ polarisationen. Motivera utifrån detta, varför man inför hjälpfältet $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$ i närvaro av polariserat material!

Räkneuppgifter:
[Hjälpmedel: BETA, typgodkänd kalkylator, formelsamling i Elektromagnetisk fältteori]

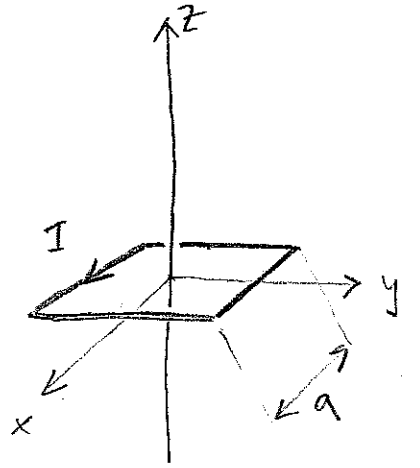
2. Figuren visar ett batteri med spänningen U inkopplat över en plattkondensator med plattavståndet b. Mellan kondensatorns metallplattor finns ett dielektriskt material med permittiviteten ϵ_1 i området $0 < x < a$. På motsvarande sätt modelleras området $a < x < b$ av permittiviteten ϵ_2. Beräkna den elektriska potentialen $V(x)$ för $0 < x < b$ då man rör sig från den undre plattans mittpunkt till den övre plattans mittpunkt, d.v.s. det går bra att bortse från kanteffekter.



3. En tunn ledare med diametern d går vinkelrätt genom en halvcirkelformad skiva så som figuren visar. Halvcirkeln har radien a och ledaren är placerad längs skivans symmetriaxel på avståndet b från dess räta kant. Skivan har tjockleken h och konduktiviteten σ. Använd spegling för att beräkna resistansen mellan den tunna ledaren och skivans raka ytterkant.



4. Den konstanta strömmen I flyter genom en kvadratisk slinga som är placerad i planet $z = 0$ enligt figuren. Slingans sida har längden a. Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{B}(z)$ längs z-axeln.

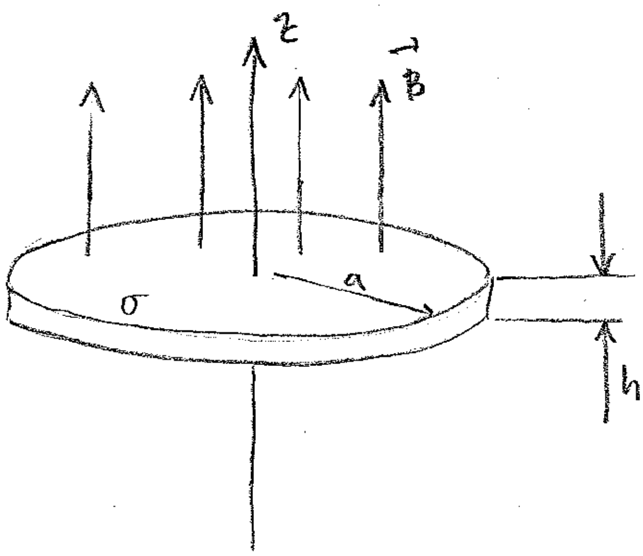


5. En tunn cirkulär skiva med ledningsförmågan σ, radien a och tjockleken h placeras i det homogena magnetfältet mellan polerna till en elektromagnet, så att skivans axel sammanfaller med fältriktningen. Beräkna medeleffektutvecklingen i skivan, om magnetfältet varierar enligt

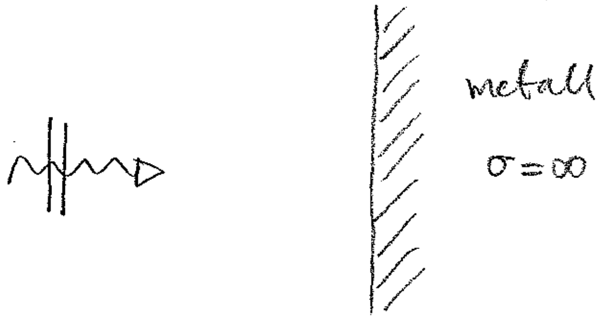
$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$$

Magnetfältet från de i skivan inducerade strömmarna kan försummas.

Ledning: Utnyttja symmetrin och formeln $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -d\Phi/dt$.



6. En plan våg i vakuum med E-fältets toppvärde E_0 infaller vinkelrätt mot en ideal metall ($\sigma = \infty$). Bestäm den komplexa ytströmtätheten $\vec{J}_s$ i metallytan!



Elektromagnetiska fält EEM015 2007-04-14
Thomas Rylander

(2) Elektrisk flödestäthet $\vec{D} = -\hat{x} D$ = konstant mellan plattorna (pga randvillkoret $\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s = 0$)

Elektriskt fält blir då ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$)

$$0 < x < a \Rightarrow \vec{E}_1 = -\hat{x} D/\epsilon_1$$

$$a < x < b \Rightarrow \vec{E}_2 = -\hat{x} D/\epsilon_2$$

Elektrisk potential blir då ($V(\vec{r}) = -\int_{\text{jord} \to \vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$)

$$0 < x < a \Rightarrow V_1(x) = \frac{D}{\epsilon_1} x$$

$$a < x < b \Rightarrow V_2(x) = \frac{D}{\epsilon_1} a + \frac{D}{\epsilon_2}(x-a)$$

Uttryck elektrisk flödestäthet i kända storheter

$$U = V_2(b) = \frac{D}{\epsilon_1} a + \frac{D}{\epsilon_2}(b-a) = \left[\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b-a}{\epsilon_2}\right] D$$

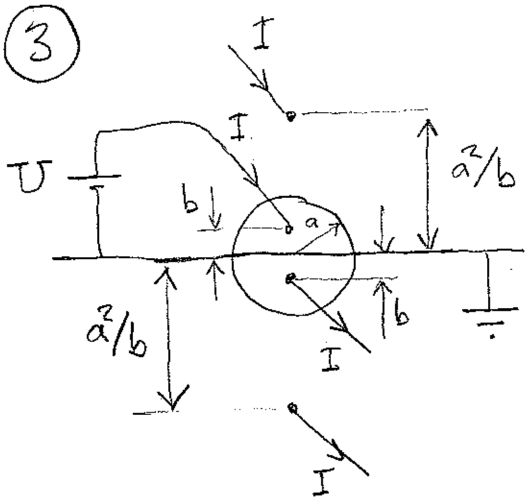
$$\Rightarrow D = \frac{U}{\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b-a}{\epsilon_2}}$$

vilket ger

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(b-a)} U & \text{då } 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{a + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(x-a)}{a + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(b-a)} U & \text{då } a < x < b \end{cases}$$

[Koll: $V(0) = 0$, $V(b) = U$
$\hat{n} \cdot \vec{D}$ och V är kontinuerliga
(kolla för $x = a$)]

(3)



Potentialen på tråden kopplad till batteriets pluspol blir

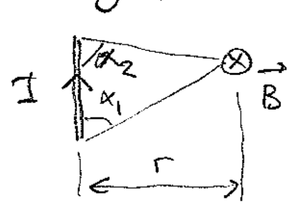
$$V^{\oplus} = \frac{I/h}{2\pi\sigma} \ln\left[\frac{2b}{d/2}\,\frac{a^2/b + b}{a^2/b - b}\right]$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma h} \ln\left[\frac{4b\,(a^2+b^2)}{d\,(a^2-b^2)}\right] = U$$

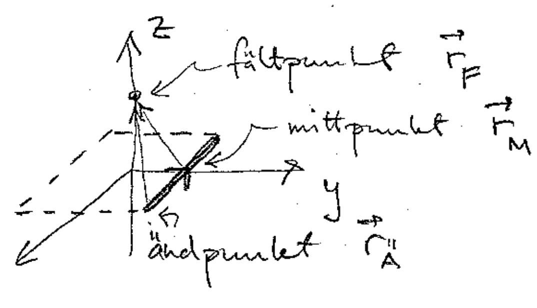
$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln\left[\frac{4b\,(a^2+b^2)}{d\,(a^2-b^2)}\right]$$

(4) Använd uttryck för $\vec{B}$ från ändlig rak strömbana

$$\vec{B}_{1S} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}$$



Räkna ut $\hat{\varphi}$, r och cos α för given geometri.
Först för ledaren som sammanfaller med linjen z=0 och $y = a/2$



$$\vec{r}_Ä = (\hat{x}+\hat{y})\frac{a}{2}\,, \quad \vec{r}_M = \hat{y}\frac{a}{2}$$

$$\vec{r}_F = \hat{z}z\,, \quad \vec{r}_F - \vec{r}_M = -\hat{y}\frac{a}{2} + \hat{z}z$$

$$\vec{r}_F - \vec{r}_Ä = -\hat{x}\frac{a}{2} - \hat{y}\frac{a}{2} + \hat{z}z$$

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{-\hat{x}\cdot(\vec{r}_F - \vec{r}_Ä)}{|\vec{r}_F - \vec{r}_Ä|} = \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2 + z^2}}$$

$$r = |\vec{r}_F - \vec{r}_M| = \sqrt{(a/2)^2 + z^2}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{-\hat{x}\times(\vec{r}_F - \vec{r}_M)}{|\vec{r}_F - \vec{r}_M|} = \frac{\hat{z}\frac{a}{2} + \hat{y}z}{\sqrt{(a/2)^2 + z^2}}$$

Magnetisk flödestäthet från denna ledare blir

$$\vec{B}_{16} = \frac{\hat{z}\frac{a}{2} + \hat{y}z}{\sqrt{(a/2)^2+z^2}} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a/2)^2+z^2}} \, \frac{a/2}{\sqrt{2(a/2)^2+z^2}}$$

$$= \left(\hat{z}\frac{a}{2}+\hat{y}z\right)\frac{\mu_0 I a}{4\pi\left[(a/2)^2+z^2\right]\sqrt{a^2/2+z^2}}$$

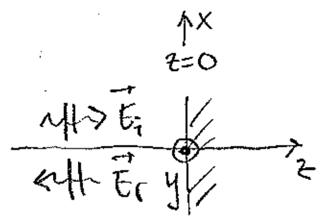
På grund av symmetrin blir den totala magnetiska flödestätheten parallell med z-axeln och man får med superposition

$$\vec{B} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi\left[(a/2)^2+z^2\right]\sqrt{a^2/2+z^2}}$$

(5) Se lösningsförslag till uppgift 10-10 i exempelsamlingen.

(6) $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \hat{x}E_0 e^{-jkz} - \hat{x}E_0 e^{+jkz} = \hat{x}E_0 2j\sin(kz)$

($\hat{n}\times\vec{E} = \vec{0}$ vid metallytan där $z=0$)



Magnetfältet blir enligt Faradays lag

$$\vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0} = j\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} = j\frac{1}{\omega\mu_0}E_0 2jk\cos(kz)\,\hat{y} = -\underbrace{\frac{k}{\omega\mu_0}}_{=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\omega\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\eta_0}} 2E_0\cos(kz)\,\hat{y}$$

$$\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H}\Big|_{z=0} = -\hat{z}\times\left[-\hat{y}\frac{2E_0}{\eta_0}\cos(kz)\right]_{z=0}$$

$$= -\hat{x}\frac{2E_0}{\eta_0}$$