Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2006-10-28, kl 8.30-12.30, lokal hus M – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i Elektromagnetisk fältteori (*utan* egna anteckningar), typgodkänd kalkylator
Besök	9.00 och 11.30
Förfrågningar	Tel. ankn. 1724 Per Jacobsson, Beräkningsteknik
Lösningar	Anslås vid Linsen 2006-10-28 kl 12.40
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2006-11-08 kl 12.00
Granskning	Beräkningsteknik 2006-11-10 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2006) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift Endast BETA och SMT får användas!

1. Utgå från $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ och $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$. Härled sambanden mellan normalkomponenterna av B-fältet och mellan tangentialkomponenterna av H-fältet på ömse sidor om en gränsyta mellan två olika material! (10p)

Räkneuppgifter: Hjälpmedel enligt listan på första sidan!

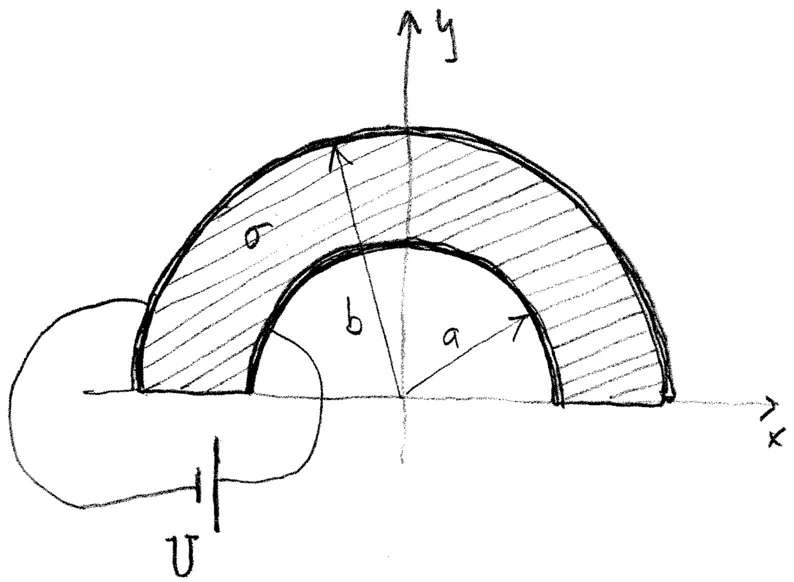
2. Fyra **tunna**, **långa**, raka, parallella ledare har laddningar enligt fig. Beräkna kraften på en av ytterledarna och potentialskillnaden mellan ytterledarna! Ledarradien är r och längden l. (10p)

3. Två sfäriska och koncentriska metallskal är placerade i ett stort område där permittiviteten är ϵ_0. Det ena skalet har radien a och laddning Q_a och det andra skalet har radien $b > a$ och laddningen Q_b. Beräkna systemets elektriska energi. (10p)

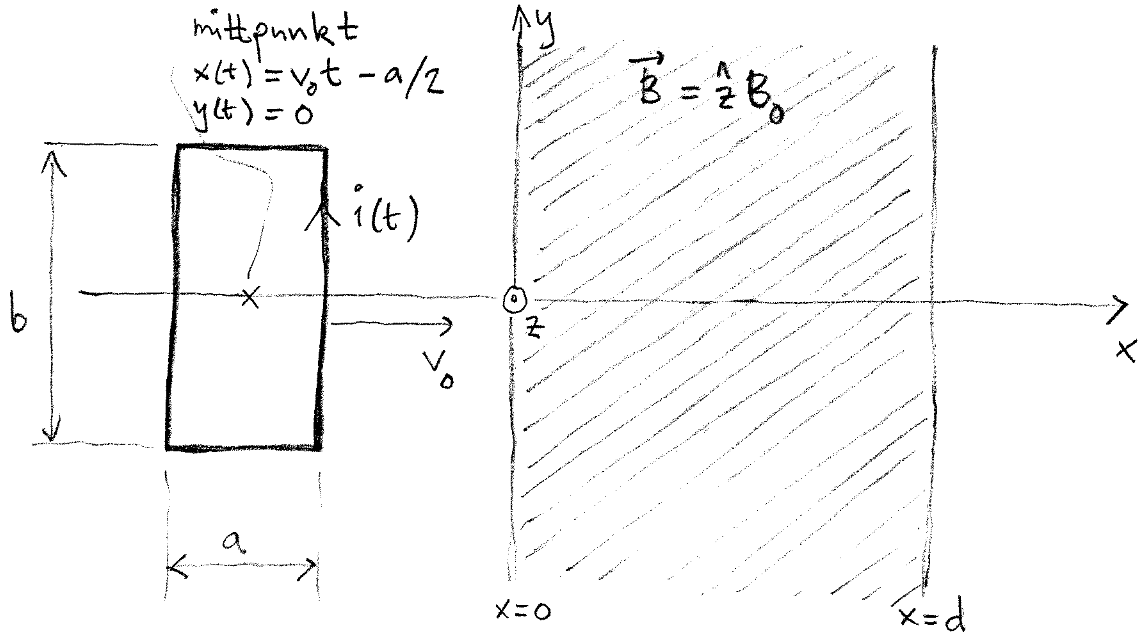
4. En skiva med tjockleken d har konduktiviteten σ. Skivan har klippts till så att den har två raka sidor och två krökta sidor enligt figuren nedan. De krökta sidornas form beskrivs i cylindriska koordinater av två konstanta radier $r = a$ och $r = b > a$. En elektrod som ligger längs ytan $r = a$ kopplas till pluspolen på ett batteri med spänningen U. Den andra elektroden placeras längs ytan $r = b$ och den kopplas till batteriets minuspol. Detta ger upphov till en strömtäthet $\vec{J} = \hat{r} J_r(r)$. Lös följande problem:

   (a) Beräkna $J_r(r)$ uttryckt i termer av skivans dimensioner och konduktivitet samt batterispänningen. (5p)

   (b) Bestäm resistansen R mellan de två elektroderna. (5p)



5. En rektangulär slinga rör sig längs x-axeln enligt figuren med den konstanta hastigheten v_0. Slingans bredd längs x-axeln är a och motsvarande mått längs y-axeln är b. Slingans mittpunkt har koordinaterna $x(t) = v_0 t - a/2$ och $y(t) = 0$. Vid tidpunkten $t = 0$ rör sig slingan in i ett område $0 < x < d$ (där $d > a$) och i detta område är flödestätheten $\vec{B} = \hat{z}B_0$ konstant. (Utanför området $0 < x < d$ är $\vec{B} = \vec{0}$.) Räkna ut den inducerade strömmen $i(t)$ som flyter genom slingan då slingans resistans är R och självinduktansen försummas. Positiv riktning för strömmen är utritad i figuren och svaret ska anges för alla tidpunkter t. (10p)



6. En elektromagnetisk våg skapas genom att en ström $\mathbb{I}_0$ flyter på en liten antenn som har längden d. Strömmen på antennen ger upphov till vektorpotentialen

$$\vec{\mathbb{A}}(R, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 \mathbb{I}_0 d}{4\pi R}\left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right) e^{-jkR}$$

uttryckt i sfäriska koordinater. Här är det komplexa fältet betecknat $\vec{\mathbb{A}}$ och motsvarande ström är $\mathbb{I}_0$ i frekvensplanet för vinkelfrekvensen ω. I området runt antennen är permittiviteten ϵ_0 och permeabiliteten μ_0. Lös följande uppgifter:

(a) Beräkna den magnetiska flödestätheten $\vec{\mathbb{B}}$ från vektorpotentialen $\vec{\mathbb{A}}$. (3p)

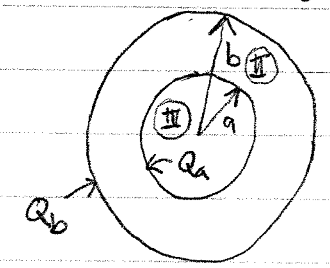
(b) Förenkla resultatet i deluppgift (a) genom att låta kR vara mycket större än ett, d.v.s. $kR \gg 1$, vilket ger $\vec{\mathbb{B}}$ mycket långt från antennen. (2p)

(c) Använd uttrycket från deluppgift (b) för att beräkna det elektriska fältet $\vec{\mathbb{E}}$ givet den magnetiska flödestätheten $\vec{\mathbb{B}}$ i området långt från antennen. (5p)

Lösningsförslag till Elektromagnetiska fält för E3 – EEM015
kl 8.30 – 12.30 den 28 oktober, 2006

(2) Se lösningsförslag till exempelsamlingen

(3)



Sfärisk symmetri $\Rightarrow \vec{E} = \hat{R}E_R(R)$

Område (I) : $\oint_S \vec{E}^{(I)} \cdot \vec{ds} = 4\pi R^2 E_R^{(I)}(R) = \frac{Q_{inne}}{\epsilon_0} = \frac{Q_a+Q_b}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E}^{(I)} = \hat{R}\frac{Q_a+Q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad ; \; b < R < \infty$$

Område (II) : $\oint_S \vec{E}^{(II)} \cdot \vec{ds} = 4\pi R^2 E_R^{(II)}(R) = \frac{Q_{inne}}{\epsilon_0} = \frac{Q_a}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E}^{(II)} = \hat{R}\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad ; \; a < R < b$$

[Område (III) : $\vec{E}^{(III)} = \vec{0}$ pga $Q_{inne} = 0$ då $R < a$]

Område (I) : $V^{(I)}(R) = -\int_{L_{\infty\to R}} \vec{E}^{(I)} \cdot \vec{dl} = -\int_{\xi=R}^{\infty} \left(\hat{R}\frac{Q_a+Q_b}{4\pi\epsilon_0 \xi^2}\right)\cdot(-\hat{R}d\xi)$

$$= \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\xi}\right]_{\xi=R}^{\infty} = \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Område (II) : $V^{(II)}(R) = -\int_{L_{b\to R}} \vec{E}^{(II)} \cdot \vec{dl} + V^{(I)}(b) = -\int_{\xi=R}^{b} \left(\hat{R}\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 \xi^2}\right)\cdot(-\hat{R}d\xi) + V^{(I)}(b)$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\xi}\right]_{\xi=R}^{b} + V^{(I)}(b) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q_a+Q_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$

[Område (III) : $V^{(III)}(R) = V^{(II)}(a)$]

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_a V^{(II)}(a) + Q_b V^{(I)}(b)\right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[Q_a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q_a(Q_a+Q_b)}{b} + \frac{Q_b(Q_a+Q_b)}{b}\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_a^2}{a} - \cancel{\frac{Q_a^2}{b}} + \cancel{\frac{Q_a^2}{b}} + 2\frac{Q_aQ_b}{b} + \frac{Q_b^2}{b}\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_a^2}{a} + \frac{2Q_aQ_b}{b} + \frac{Q_b^2}{b}\right]$$

④ (a) $\nabla\cdot\vec{J}=0 \Rightarrow \nabla\cdot(\sigma\vec{E}) = -\nabla\cdot(\sigma\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Eftersom $\vec{E} = \hat{r}E_r(r) = -\nabla V$ så är $V=V(r)$ vilket ger

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r} = \xi \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\xi}{r}$$

$$\Rightarrow V = \xi \ln(r) + \zeta$$

$$\text{I}: V(a) = \xi\ln(a) + \zeta = U \quad \text{och} \quad \text{II}: V(b) = \xi\ln(b) + \zeta = 0$$

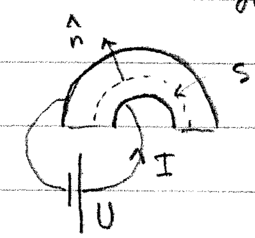
$$\text{I}-\text{II} \Rightarrow V(a) - V(b) = \xi\ln(a/b) = U \Rightarrow \xi = \frac{U}{\ln(a/b)} = -\frac{U}{\ln(b/a)}$$

$$\text{II} \Rightarrow \zeta = -\xi\ln(b) = +\frac{U}{\ln(b/a)}\ln(b)$$

$$\therefore V(r) = -\frac{U}{\ln(b/a)}\ln(r) + \frac{U}{\ln(b/a)}\ln(b) = U\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \hat{r}\frac{U}{r\ln(b/a)} \Rightarrow \vec{J} = \hat{r}\frac{\sigma U}{r\ln(b/a)}$$

(b)



$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\varphi=0}^{\pi}\left(\hat{r}\frac{\sigma U}{r\ln(b/a)}\right)\cdot\left(\hat{r}(rd)\,d\varphi\right)$$

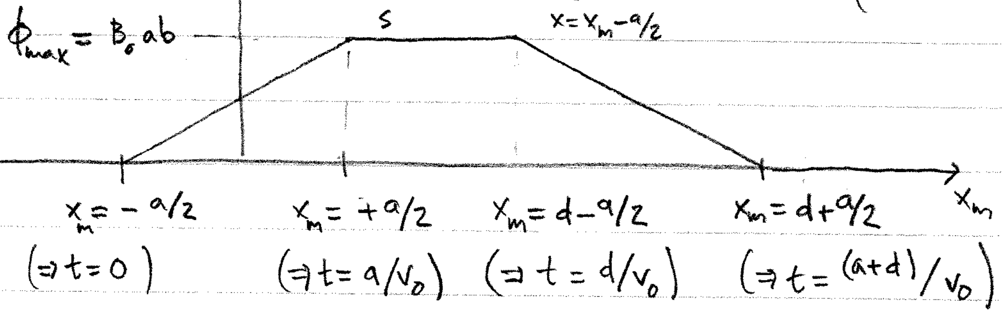
$$= \frac{\sigma U d}{\ln(b/a)}\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{\pi\sigma d}{\ln(b/a)}U$$

$$\therefore R = U/I = \frac{\ln(b/a)}{\pi\sigma d}$$

⑤ Man har 2 st olika situationer:

* slingan är på väg in i eller ut från området $0<x<d$
$\Rightarrow \mathcal{V} = -d\Phi/dt = Ri \Rightarrow i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$
* slingan är helt och hållet i området $0<x<d$ eller helt och hållet utanför $\Rightarrow \mathcal{V} = -d\Phi/dt = \{\Phi = \text{konst}\} = 0$

$$\Phi(x_m) = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = b\int_{x=x_m-a/2}^{x=x_m+a/2} B_z(x)\,dx \qquad (d\vec{S} = \hat{z}\,b\,dx)$$



$t<0 \Rightarrow i=0$

$0<t<\frac{a}{v_0} \Rightarrow i=-\frac{1}{R}\frac{\phi_{max}-0}{a/v_0-0}=-\frac{v_0 B_0 ab}{Ra}=-\frac{v_0 B_0 b}{R}$

$\frac{a}{v_0}<t<\frac{d}{v_0} \Rightarrow i=0$

$\frac{d}{v_0}<t<\frac{a+d}{v_0} \Rightarrow i=-\frac{1}{R}\frac{0-\phi_{max}}{\frac{a+d}{v_0}-\frac{d}{v_0}}=\frac{v_0 B_0 ab}{Ra}=\frac{v_0 B_0 b}{R}$

$\frac{a+d}{v_0}<t \Rightarrow i=0$

(6) (a) $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\hat{\varphi}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$

$$=\left\{\begin{aligned} RA_\theta &= -\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\sin\theta\, e^{-jkR} \\ \frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) &= -\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\sin\theta\,(-jk)\,e^{-jkR}=jk\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi}\sin\theta\, e^{-jkR} \\ \frac{\partial}{\partial\theta}A_R &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi R}\cos\theta\, e^{-jkR}\right]=-\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi R}\sin\theta\, e^{-jkR}\end{aligned}\right\}$$

$$=\hat{\varphi}\,\frac{jk\mu_0 I_0 d}{4\pi R}\left[1+\frac{1}{jkR}\right]\sin\theta\, e^{-jkR}$$

(b) $kR\gg 1 \Rightarrow \vec{B}=\hat{\varphi}\,\frac{jk\mu_0 I_0 d}{4\pi R}\sin\theta\, e^{-jkR}$

(c) $\nabla\times\vec{H}=j\omega\epsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{E}=\frac{\nabla\times\vec{H}}{j\omega\epsilon_0}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{j\omega\epsilon_0\mu_0}$

$$\therefore \vec{E}=\frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0}\left[\hat{R}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\varphi)-\hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\varphi)\right]$$

$$=\frac{kI_0 d}{4\pi\omega\epsilon_0}\left[\hat{R}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\, e^{-jkR}}{R}\right)-\hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\sin\theta\, e^{-jkR}\right)\right]$$

$$=\frac{k^3 I_0 d}{4\pi\omega\epsilon_0}\left[\hat{R}\frac{2\cos\theta}{(kR)^2}+\hat{\theta}\, j\frac{\sin\theta}{kR}\right]e^{-jkR}\underset{kR\gg1}{\simeq}\hat{\theta}\,\frac{jk^2 I_0 d}{\omega\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{4\pi R}e^{-jkR}$$

$$\boxed{k^2=k\frac{\omega}{c}=kZ_0\omega\epsilon_0} \longrightarrow =\hat{\theta}Z_0\frac{jkI_0 d}{4\pi R}\sin\theta\, e^{-jkR}$$