Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2006-08-28, kl 14.00-18.00, lokal hus V – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i Elektromagnetisk fältteori (*utan* egna anteckningar), typgodkänd kalkylator
Besök	14.30 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Beräkningsteknik
Lösningar	Anslås vid Linsen 2006-08-28 kl 18.10
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2006-09-08 kl 12.00
Granskning	Beräkningsteknik 2006-09-13 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2005) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift Endast BETA och SMT får användas!

1. Utgå från Maxwells ekvationer i komplex form:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

   Härled ett uttryck för utbredningskonstanten γ för en s.k. plan våg, som utbreder sig i ett material karakteriserat av ϵ, μ, σ! Ansätt därefter $\vec{E} = \hat{x}E_0e^{-\gamma z}$ och härled uttrycket för vågimpedansen Z för denna våg!

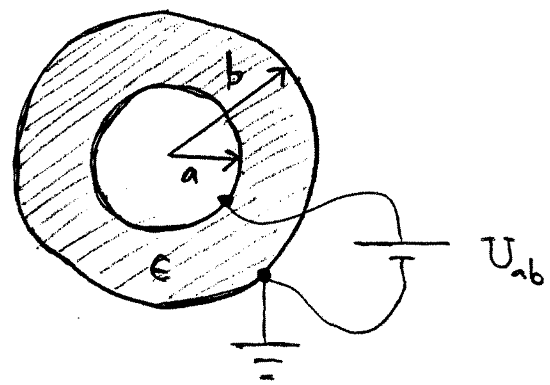
Räkneuppgifter: Hjälpmedel enligt listan på första sidan!

2. Figuren nedan visar tvärsnittet för en koaxialkabel, som modelleras som två mycket långa cirkulära metallcylindrar. Innercylindern har radien a och yttercylindern har radien $b > a$. Båda cylindrarna har längden $L \gg b$ och ett dielektrikum med permittiviteten ϵ finns i området mellan cylindrarna. Ett batteri med spänningen U_{ab} kopplas med pluspolen till innercylindern och minuspolen till yttercylindern. Detta innebär att innercylindern (efter en stund) får laddningen $+Q$ och yttercylindern får laddningen $-Q$.

   (a) Beräkna först $\vec{D}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ och $V(\vec{r})$ i området mellan de två metallcylindrarna.

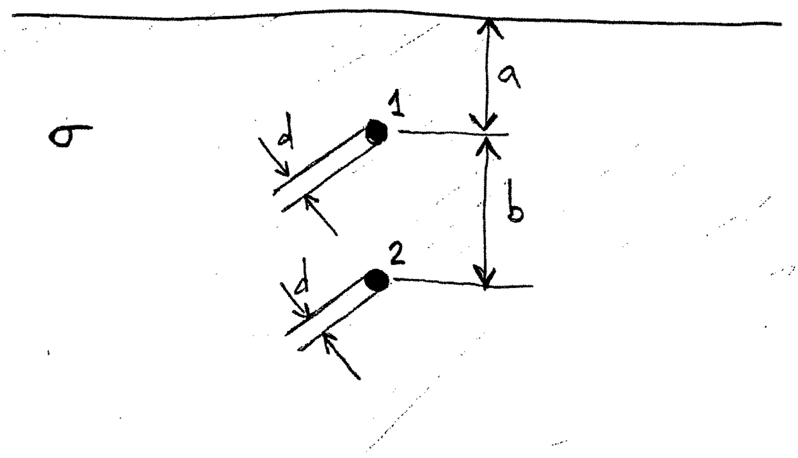
   (b) Uttryck laddningen Q på innercylindern i termer av batterispänningen U_{ab} baserat på resultatet i deluppgift (a).

   (c) Beräkna kapacitansen baserat på resultatet i deluppgift (b).

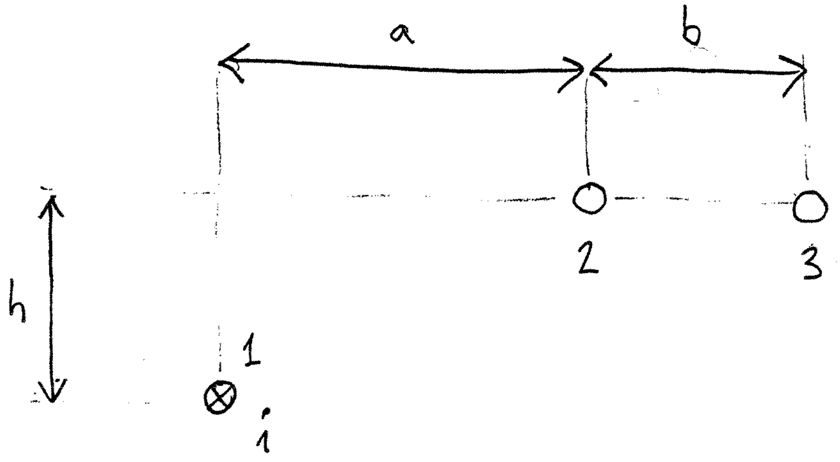


3. I ett sfäriskt område med radien a finns rymdladdningstätheten $\rho(R) = (R/a)\rho_0$, där ρ_0 är en konstant. Beräkna den elektrostatiska energin associerad med denna laddningsfördelning.

4. Två tunna ledare med radie $d/2$ går vinkelrätt genom en mycket stor skiva så som figuren visar. Avståndet från ledare 1 till skivans övre kant är a och avståndet från ledare 2 till skivans övre kant är $a + b$. (Avstånden från ledarna till skivans övriga kanter är mycket stora.) Skivan har tjockleken t och konduktiviteten σ. Beräkna resistansen mellan ledare 1 och ledare 2.

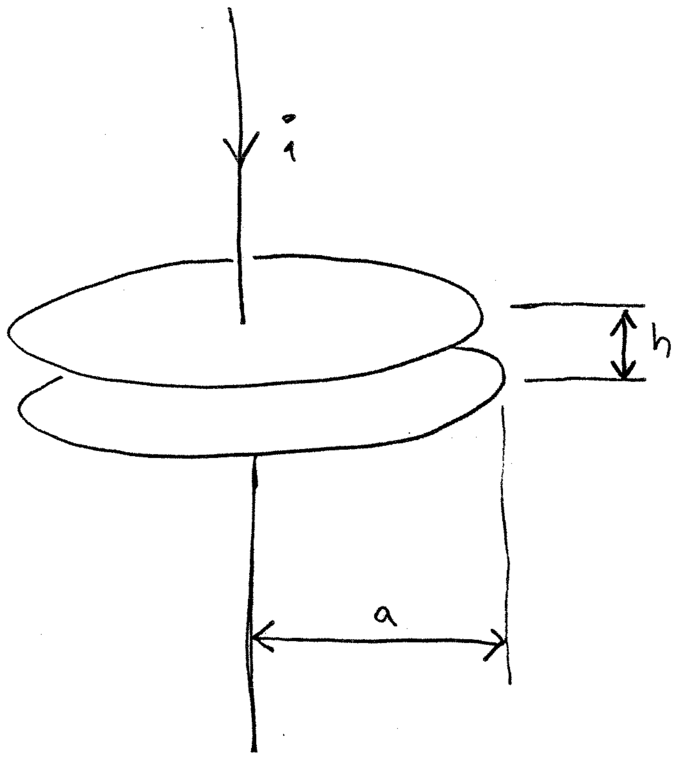


5. Beräkna inducerad spänning per längdenhet i dubbelledaren 2-3 då strömmen $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ flyter i ledare 1, se figur nedan. De tre ledarna är mycket långa.



6. En rak tråd som är mycket lång för strömmen $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. En cirkulär plattkondensator med radie a och plattavstånd h är inkopplad mitt på tråden så som figuren visar. Bestäm magnetfältet $\vec{H}(\vec{r})$ i området mellan kondensatorplattorna.

Ledning. Det elektriska fältet kan antas vara homogent mellan kondensatorplattorna. Problemet är dessutom helt rotationssymmetriskt med avseende på den axel som sammanfaller med tråden.



CHALMERS

Dokumentnamn | Sida
Utfärdare | Datum
Ärende

(2) a) $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q \Rightarrow D_r\, 2\pi r L = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q/L}{2\pi r}$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon r}$$

$$V = \cancel{V_{\frac{1}{=}}} - \int_{\frac{1}{=}\to\vec{r}}^{0} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_r^b \left(\frac{Q/L}{2\pi\epsilon\xi}\hat{r}\right)\cdot\left(-\hat{r}\,d\xi\right)$$

$$= \int_r^b \frac{Q/L}{2\pi\epsilon\xi}\,d\xi = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon}\left[\ln\xi\right]_r^b = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon}\ln(b/r)$$

b) $V(r=a) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon}\ln(b/a) = U_{ab}$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}U_{ab}$$

c) $C = \frac{Q}{U_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$

(3) $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_V \rho\,dV \Rightarrow D_R\,4\pi R^2 = \int_0^R \frac{\xi}{a}\rho_0\,4\pi\xi^2\,d\xi$ (då $R\le a$)

$$\Rightarrow D_R = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{4\pi\rho_0}{a}\left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho_0 R^2}{4a} \quad (\text{då } R\le a)$$

$$D_R = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{4\pi\rho_0}{a}\left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^a = \frac{\rho_0 a^3}{4R^2} \quad (\text{då } R\ge a)$$

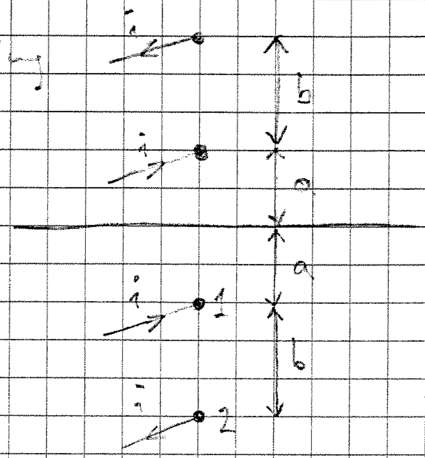
Energitätheten är $w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0}|\vec{D}|^2$ vilket ger

$$W_e = \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\int_0^a\left(\frac{\rho_0 R^2}{4a}\right)^2 4\pi R^2\,dR + \int_a^\infty\left(\frac{\rho_0 a^3}{4R^2}\right)^2 4\pi R^2\,dR\right]$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\rho_0^2\pi}{4}\left[\int_0^a \frac{R^6}{a^2}\,dR + \int_a^\infty \frac{a^6}{R^2}\,dR\right]$$

$$= \frac{\pi\rho_0^2}{8\epsilon_0}\left(\left[\frac{R^7}{7a^2}\right]_0^a + \left[-\frac{a^6}{R}\right]_a^\infty\right) = \frac{\pi\rho_0^2}{8\epsilon_0}\left(\frac{a^5}{7}+a^5\right) = \frac{\pi\rho_0^2 a^5}{7\epsilon_0}$$

(4) Spegling



Potential från par av ledare

$$V(\vec{r}) = \frac{i/t}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'_-|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_+|}\right)$$

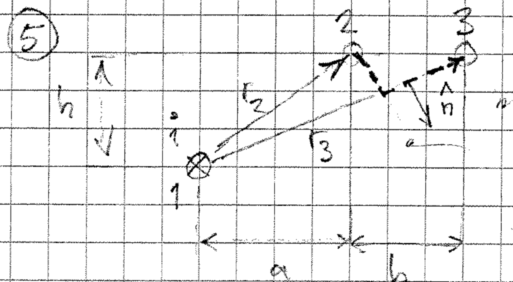
$$V_1 = \frac{i}{2\pi\sigma t}\left[\ln\left(\frac{b}{d/2}\right) + \ln\left(\frac{2a+b}{2a}\right)\right] = \frac{i}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{(2a+b)\,b}{a\,d}\right)$$

$$V_2 = \frac{i}{2\pi\sigma t}\left[\ln\left(\frac{d/2}{b}\right) + \ln\left(\frac{2(a+b)}{2a+b}\right)\right] = \frac{i}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{(a+b)\,d}{(2a+b)\,b}\right)$$

$$u = V_1 - V_2 = \frac{i}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{(2a+b)^2 b^2}{(a+b)\,a\,d^2}\right)$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{1}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{(2a+b)^2 b^2}{(a+b)\,a\,d^2}\right)$$

(5)



cirkelsegment med radie $r_2 = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}$

cirkelsegment med radie $r_2 = \sqrt{a^2 + h^2}$

Flödestäthet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

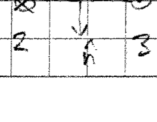
integreras över streckad kontur.

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = L\int_{r_2}^{r_3}\left(\frac{-\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}\right)\cdot\left(-\hat{\varphi}\,dr\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(r_3/r_2\right) L$$

$$\frac{v}{L} = -\frac{d(\Phi/L)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I_0\cos(\omega t)}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(a+b)^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0\omega I_0\sin(\omega t)}{4\pi}\ln\left(\frac{(a+b)^2+h^2}{a^2+h^2}\right)$$

riktn.



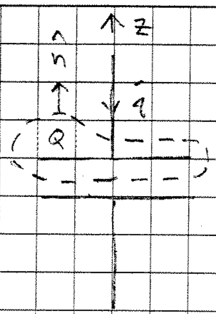
CHALMERS

Dokumentnamn | Sida

Utfärdare | Datum

Ärende

(6)



$$j\omega\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow j\omega\int_V \rho\,dv + \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} \Rightarrow j\omega Q - I = 0$$

$$\therefore Q = I/j\omega$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = -D_z\pi a^2 = Q = I/j\omega \Rightarrow \vec{D} = \frac{I}{j\omega\pi a^2}(-\hat{z})$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{I}{j\omega\epsilon_0\pi a^2}(-\hat{z})$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = j\omega\epsilon_0\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} \Rightarrow \oint_L \left(H_\varphi(r)\hat{\varphi}\right)\cdot d\vec{l} = j\omega\epsilon_0\int_S\left(\frac{-I\hat{z}}{j\omega\epsilon_0\pi a^2}\right)\cdot d\vec{s}$$

$$H_\varphi 2\pi r = \frac{-I}{\pi a^2}\pi r^2 \Rightarrow H_\varphi = \frac{-I}{2\pi a^2}r$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = -\frac{I_0\cos(\omega t)}{2\pi a^2}r\hat{\varphi}$$