

# Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2006-04-22, kl 14.00-18.00, lokal hus V – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i Elektromagnetisk fältteori ( <i>utan</i> egna anteckningar), typgodkänd kalkylator
Besök	14.30 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Beräkningsteknik
Lösningar	Anslås vid Linsen 2006-04-22 kl 18.10
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2006-05-03 kl 12.00
Granskning	Beräkningsteknik 2006-05-04 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2005) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

**OBS! Tvådelad tentamen!**

**Teoriuppgift** Endast BETA och SMT får användas!

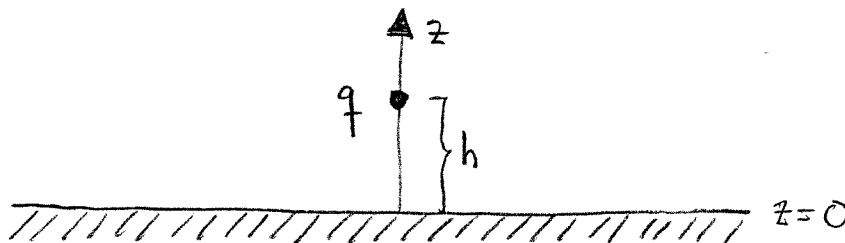
- Utgå från  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  och  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ . Härled sambanden mellan normalkomponenterna av  $\vec{B}$ -fältet och mellan tangentialkomponenterna av  $\vec{H}$ -fältet på ömse sidor om en gränssyta mellan två olika material! (Rita tydlig figur!)

**Räkneuppgifter:** Hjälpmedel enligt listan på första sidan!

- Figuren visar en punktladdning med laddningen  $q$  på höjden  $h$  ovanför ett oändligt stort metallplan som är jordat.
  - Beräkna ytladdningstätheten  $\rho_s(\vec{r})$  som induceras på metallplanet.
  - Hur stor är den totala laddning på jordplanet?

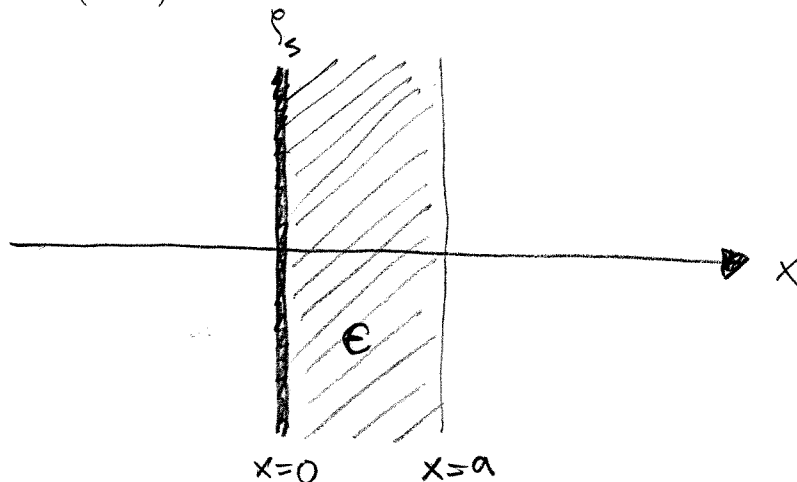
**Ledning.** Om man gärna vill integrera i deluppgift (b) så kan man ha användning av formeln

$$\int \frac{x}{(ax^2 + b)^{3/2}} dx = -\frac{1}{a\sqrt{ax^2 + b}}$$



- En dielektrisk skiva som är mycket stor har gnidits på ena sidan så att där finns en konstant ytladdningstäthet  $\rho_s$ . Den dielektriska skivan har tjockleken  $a$  och den karakteriseras av permittiviteten  $\epsilon$ . Ett tvärsnitt av skivan visas i figuren nedan. Beräkna den elektriska potentialen överallt och använd  $x = 0$  som referenspunkt så att potentialen uppfyller  $V(x = 0) = 0$ .

**Ledning.** Det går bra att låta den elektriska flödestätheten i området  $x > a$  vara lika stor och motriktad jämfört med densamma i området  $x < 0$  – med andra ord  $\vec{D}(x > a) = -\vec{D}(x < 0)$ .

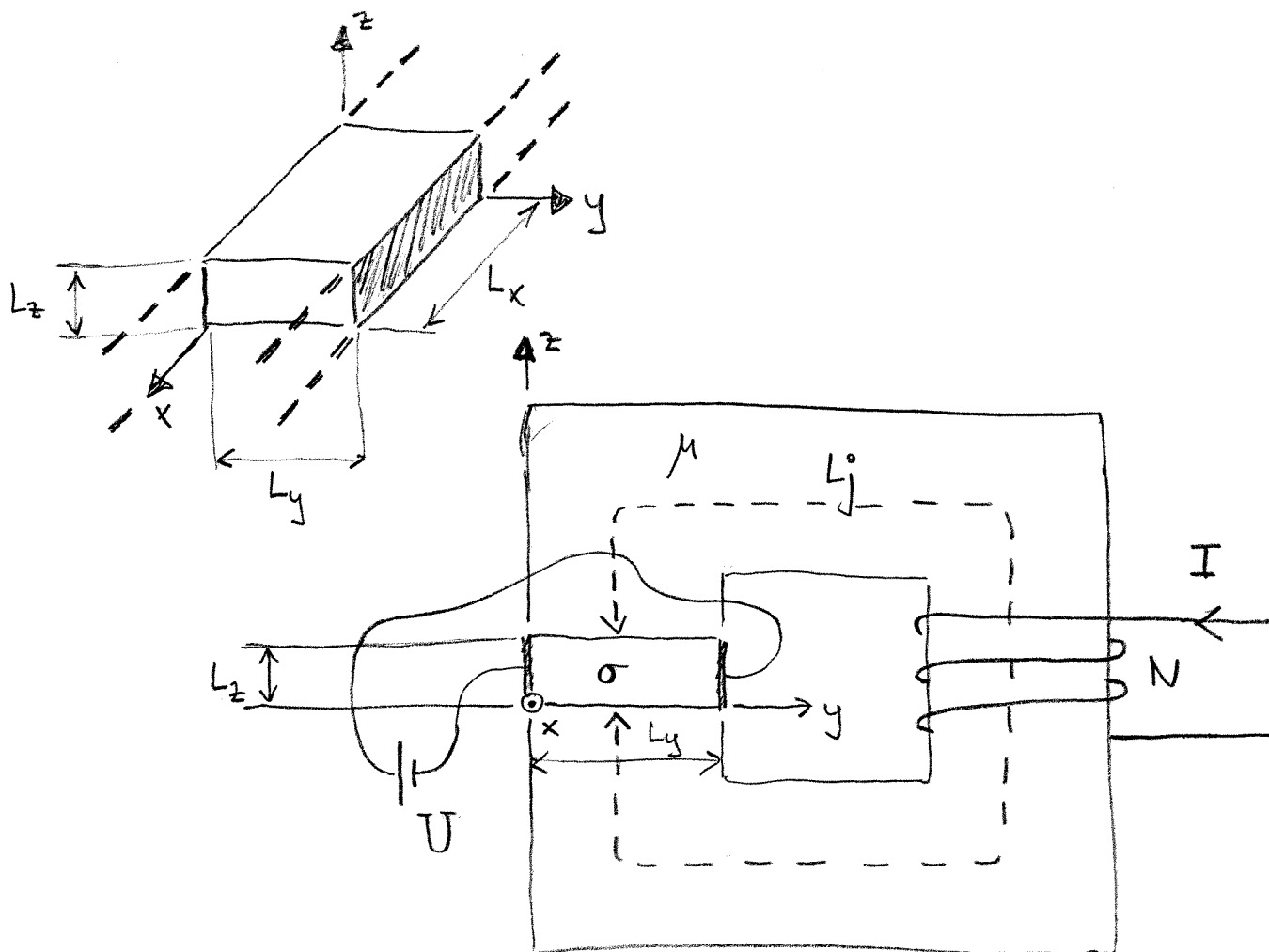


4. Figuren visar en del av ett rör med kvadratisk tvärsnitt. Röret är fyllt med saltvatten som har ledningsförmågan  $\sigma$  och permeabilitet  $\mu_0$ . Det hela är arrangerat så att

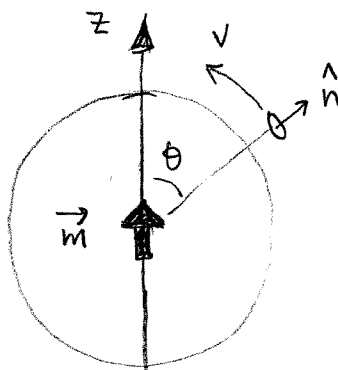
- en konstant och homogen horisontell elektrisk ström  $\vec{J} = \hat{y}J_y$  och
- en konstant och homogen vertikal magnetisk flödestäthet  $\vec{B} = \hat{z}B_z$

finns i rätblocket som upptar volymen  $0 < x < L_x$ ,  $0 < y < L_y$  och  $0 < z < L_z$ .

- (a) Ett batteri med spänningen  $U$  är inkopplat mellan den högra och vänstra metallplattan enligt figuren. Beräkna den horisontella strömstätheten  $\vec{J}$  som flyter genom saltvattnet.
- (b) En järnkärna med ett gap är placerat så att röret passerar genom gapet enligt figuren. Järnet har permeabiliteten  $\mu$  och läckning kan försummas. Beräkna den magnetiska flödestätheten  $\vec{B}$  i gapet då strömmen  $I$  flyter genom spolen med  $N$  varv. Räkna med konstant längd  $L_j$  för fältlinjerna i järnet och längden  $L_z$  i gapet där saltvattnet finns.
- (c) Beräkna den totala kraften som verkar på vattnet i rätblocket  $L_x \times L_y \times L_z$  genom att använda kraften per volymsenhet  $d\vec{F}/dv = \vec{J} \times \vec{B}$ .



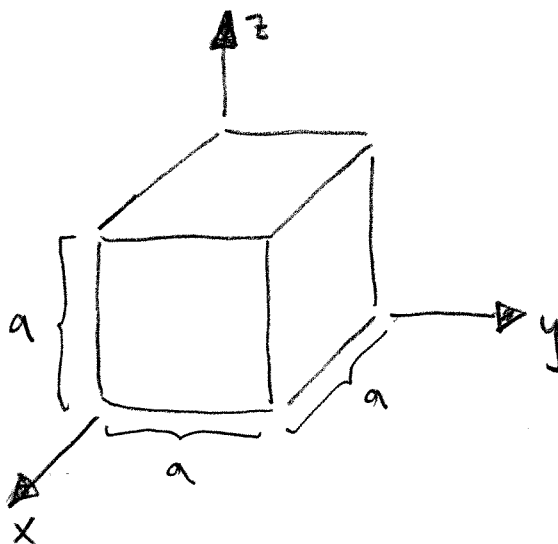
5. En fågel flyger med konstant hastigheten  $v$  från ekvatorn mot nordpolen på konstant avstånd  $R$  från jordens centrum. Med sig har fågeln en liten cirkulär metallslinga med radien  $a$ . Fågeln har kopplat in en voltmeter till slingan och ser till att hålla slingan så att dess normal  $\hat{n}$  pekar vertikalt - vi har alltså  $\hat{n} = \hat{R}$  för slingan. Jordens magnetfält där fågeln flyger beskrivs enklast av en magnetisk dipol  $\vec{m}$  som är placerad i jordens centrum enligt figuren nedan. Beräkna beloppet av den inducerade spänning som fågeln läser av på voltmeteren.



6. En elektromagnetisk våg har stängts in i en ihålig kubformad låda. Lådan har perfekt elektriskt ledande väggar med sidan  $a$ . Permittiviteten är  $\epsilon_0$  och permeabiliteten är  $\mu_0$  inuti metallboxen och det elektriska fältet beskrivs enklast som

$$\vec{E} = \hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t).$$

- (a) Använd det elektriska fältet ovan för att beräkna motsvarande magnetiska fält i metallboxen. (Tänk på att detta är inte någon planvåg!)
- (b) Beräkna ytströmmarna på metallboxens väggar. Eftersom boxens väggar är tillverkade av en perfekt elektriskt ledare kommer det inte finnas några elektromagnetiska fält inuti dessa väggar.



# Lösningsskiss till EEMF15 - Elektromagnetiska fält för E3

2006-4-22 Thomas Rylander

(2) (a)

$\vec{r}_1 = +zh$   
 $\vec{r}_2 = -zh$   
 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \frac{1}{2}h}{|\vec{r} - \frac{1}{2}h|^3} - \frac{\vec{r} + \frac{1}{2}h}{|\vec{r} + \frac{1}{2}h|^3} \right]$   
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$   
 $\rho_s = \hat{n} \cdot \vec{D}$

$$\rho_s(r, z=0) = \frac{q}{4\pi} \hat{n} \cdot \left[ \frac{\hat{r}r - \frac{1}{2}h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{\hat{r}r + \frac{1}{2}h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi} \frac{-2h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

(b) Alt I:

Gaussylagen:  $\oint_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$   
 $\Rightarrow \int_{S_+} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_-} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$

Dipolfält på stort avstånd  $R \rightarrow \infty$  ger  $D \sim R^{-3}$   
 integrerat över yta som har area  $\sim R^2$  resulterar i

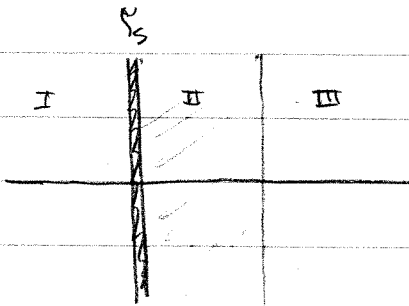
$$\underbrace{\int_{S_+} \vec{D} \cdot d\vec{s}}_{\xrightarrow{\text{då } R \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_{S_-} \vec{D} \cdot d\vec{s}}_{\xrightarrow{\text{då } R \rightarrow \infty} -\int \rho_s ds} = q \Rightarrow q_{\text{metall plan}} = \int \rho_s ds = -q$$

Alt II:  $q_{\text{metall plan}} = \int \rho_s ds = \int_0^\infty \left[ -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \right] 2\pi r dr$

$$= -qh \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = -qh \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]_0^\infty$$

$$= -qh \left( 0 + \frac{1}{h} \right) = -q$$

3



$$\vec{D} = \hat{x} D_x \text{ pga symmetri}$$

$$\vec{D}^{\text{II}} = \vec{D}^{\text{III}} \text{ pga } \hat{x} \cdot (\vec{D}^{\text{III}} - \vec{D}^{\text{II}}) = 0$$

$x=0$   $x=a$  Gauss lag för cylinder med axel parallell med  $x$ -axeln och centrerad vid  $x=0$

$$\oint_{S_{\square}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{inne}} \Rightarrow \vec{D}^{\text{I}} \cdot (-\hat{x}) \Delta s + \vec{D}^{\text{II/III}} \cdot (\hat{x}) \Delta s = \rho_s \Delta s$$

och man får med  $\vec{D}^{\text{I}} = -D_x \hat{x}$ ,  $\vec{D}^{\text{II}} = D_x \hat{x}$  och  $\vec{D}^{\text{III}} = D_x \hat{x}$

$$2D \Delta s = \rho_s \Delta s \Rightarrow D = \rho_s / 2$$

vilket ger

$$\vec{D}^{\text{I}} = -\hat{x} \frac{\rho_s}{2} \Rightarrow \vec{E}^{\text{I}} = -\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{D}^{\text{II}} = +\hat{x} \frac{\rho_s}{2} \Rightarrow \vec{E}^{\text{II}} = +\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\vec{D}^{\text{III}} = +\hat{x} \frac{\rho_s}{2} \Rightarrow \vec{E}^{\text{III}} = +\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Potentialen för  $\rho_s$  är  $V(\vec{r}) = - \int_{L_{\perp} \rightarrow \vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{\perp}$

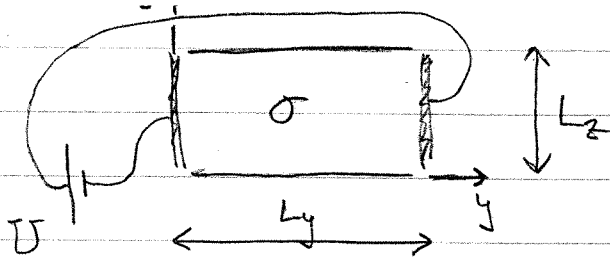
$$V^{\text{I}} = - \int_x^0 \left( -\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \right) \cdot (-\hat{x} d\xi) = - \left[ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \xi \right]_x^0 = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} x$$

$$V^{\text{II}} = - \int_0^x \left( +\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \cdot (+\hat{x} d\xi) = - \left[ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \xi \right]_0^x = - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r} x$$

$$V^{\text{III}} = - \int_0^a \left( +\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \cdot (+\hat{x} d\xi) - \int_a^x \left( +\hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \right) \cdot (+\hat{x} d\xi)$$

$$= - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0 \epsilon_r} a - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (x-a) = - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( x + \left( \frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) a \right)$$

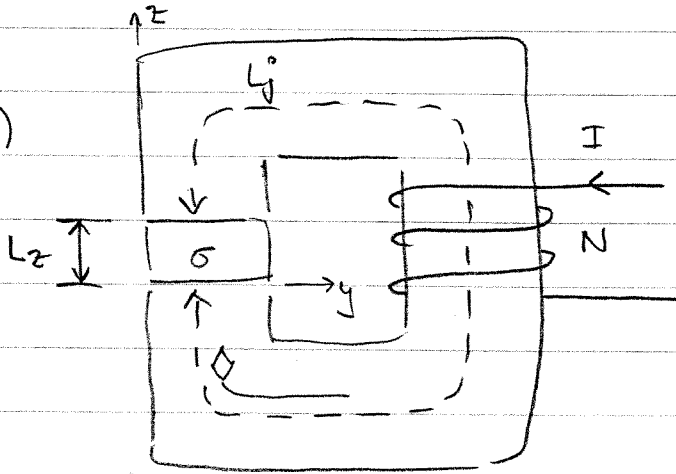
④ (a)



$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \left( -\hat{y} \frac{U}{L_y} \right)$$

$$= -\hat{y} \frac{\sigma U}{L_y}$$

(b)



$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$H_j L_j + H_z L_z = NI$$

$$\frac{B_j}{\mu_0 \mu_r} L_j + \frac{B_z}{\mu_0} L_z = NI$$

Randislikkor  $\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow B_j = B_z$   
vilket ger

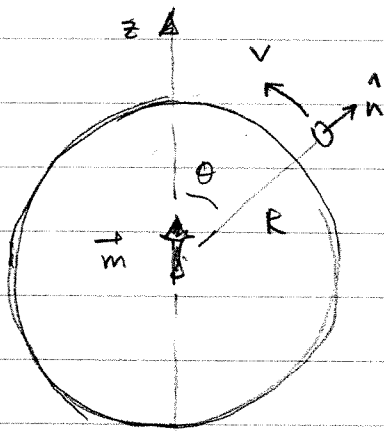
$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{L_j / \mu_r + L_z} \Rightarrow \vec{B} = \hat{x} \frac{\mu_0 NI}{L_j / \mu_r + L_z}$$

(c)

$$\frac{d\vec{F}}{dv} = \vec{J} \times \vec{B} = -\hat{x} \frac{\sigma U}{L_y} \cdot \frac{\mu_0 NI}{L_j / \mu_r + L_z}$$

$$\vec{F}_{tot} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dv = -\hat{x} \frac{\sigma U}{L_y} \cdot \frac{\mu_0 NI}{L_j / \mu_r + L_z} L_x L_y L_z$$

5



Magnetisk fältstättet

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{R} 2\cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

ger inducerad spänning  $\mathcal{V} = -\frac{d\phi}{dt}$ 

$$\mathcal{V} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx -\frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \hat{R} \Delta s) = \left[ \begin{array}{l} \text{slingans area} \\ \Delta s = \pi a^2 \end{array} \right]$$

$$= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} 2\cos\theta \pi a^2 \right) = \left[ \begin{array}{l} \text{slingans pos. } v(t_0 - t) = \theta R \\ \text{med } t_0 = \pi R / (2v) \end{array} \right]$$

$$= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 m a^2}{2R^3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R}\right) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 m a^2}{2R^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R}\right) \cdot \left(-\frac{v}{R}\right)$$

$$|\mathcal{V}| = \frac{\mu_0 m a^2 v}{2R^4} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R}\right) = \frac{\mu_0 m a^2 v}{2R^4} \cos\left(\frac{vt}{R}\right)$$

$$\text{där } 0 < vt/R < \pi/2 \Rightarrow 0 < t < \frac{\pi R}{2v}$$

(se nästa sida för alternativ lösning)

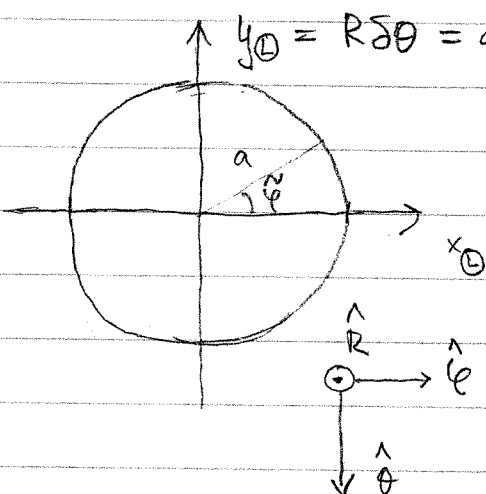


5) Alternativ lösning med  $\mathcal{V} = \oint_L (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$   
 där  $\vec{u} = -v \hat{\theta}$ .

$$\vec{u} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ 0 & -v & 0 \\ B_R & B_\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{\varphi} v B_R$$

$$= \hat{\varphi} v \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} 2 \cos \theta$$

Lokalt koordinatsystem  $\mathcal{L}$  i slingans plan



$$f(\theta + \delta\theta) \stackrel{\Delta}{=} \cos(\theta + \delta\theta) \\ = \{ \text{Taylor utveckling} \} \\ \approx \cos \theta + (-\sin \theta) \delta\theta + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{B} = \hat{x}_{\mathcal{L}} \frac{\mu_0 m v}{2\pi R^3} (\cos \theta + (-\sin \theta) \delta\theta)$$

$$d\vec{l} = \hat{\varphi}_{\mathcal{L}} a d\varphi_{\mathcal{L}} = a (-\hat{x}_{\mathcal{L}} \sin \varphi_{\mathcal{L}} + \hat{y}_{\mathcal{L}} \cos \varphi_{\mathcal{L}}) d\varphi_{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{V} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 m v}{2\pi R^3} \left[ \cos \theta + (-\sin \theta) \frac{a \sin \varphi_{\mathcal{L}}}{R} \right] (-\sin \varphi_{\mathcal{L}}) d\varphi_{\mathcal{L}}$$

$$= \frac{\mu_0 m v a}{2\pi R^3} \left[ \underbrace{- \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \varphi_{\mathcal{L}} d\varphi_{\mathcal{L}}}_{=0} + \frac{a \sin \theta}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_{\mathcal{L}} d\varphi_{\mathcal{L}}}_{=\pi} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 m v a^2}{2R^4} \sin \theta = \frac{\mu_0 m v a^2}{2R^4} \cos \left( \frac{vt}{R} \right)$$

$$(6) (a) \vec{E} = \hat{z} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) = \hat{z} E_z$$

$$\vec{H} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0} \left( \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{j E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \left( \hat{x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) - \hat{y} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \left( -\hat{x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \hat{y} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right) \sin(\omega t)$$

(b)  $\gamma$ strom  $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$

$$\vec{J}_s \Big|_{x=0} = -\hat{z} \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s \Big|_{x=a} = -\hat{z} \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s \Big|_{y=0} = -\hat{z} \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s \Big|_{y=a} = -\hat{z} \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s \Big|_{z=0} = \frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \left( \hat{x} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \hat{y} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right) \sin(\omega t)$$

$$\vec{J}_s \Big|_{z=a} = -\frac{E_0 \pi}{\omega\mu_0 a} \left( \hat{x} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \hat{y} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right) \sin(\omega t)$$

ytz	normal
x=0	$-\hat{x}$
x=a	$+\hat{x}$
y=0	$-\hat{y}$
y=a	$+\hat{y}$
z=0	$+\hat{z}$
z=a	$-\hat{z}$