Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2005-12-15, kl 14.00-18.00, lokal hus V – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i Elektromagnetisk fältteori (*utan* egna anteckningar), typgodkänd kalkylator
Besök	14.30 och 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Beräkningsteknik
Lösningar	Anslås vid Linsen 2005-12-15 kl 18.10
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2006-01-13 kl 12.00
Granskning	Beräkningsteknik 2006-01-16 kl 12.00-13.00 Beräkningsteknik 2006-01-18 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng (från höstterminen 2005) får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

OBS! Tvådelad tentamen!

Teoriuppgift Endast BETA och SMT får användas!

1. Utgå från Amperes lag för B-fältet i vakuum och $\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$, där $\vec{J}_m$ är ekvivalent magnetiseringsströmtäthet och $\vec{M}$ magnetiseringen. Motivera utifrån detta, varför man inför hjälpfältet $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})/\mu_0 - \vec{M}(\vec{r})$ i närvaro av magnetiserat material. (10p)

Räkneuppgifter: Hjälpmedel enligt listan på första sidan!

Dina poäng från årets dugga kommer att adderas till poängen till uppgift 2 enligt kurs-PM. Dock max 10p på uppgift 2.

2. Luften har en begränsad genomslagsfasthet som vi betecknar E_{gl}, vilket innebär att om det elektriska fältets belopp överstiger E_{gl} någonstans i luften så får man ett gnistöverslag. En metallkula med radien a i luft kan därför högst hållas vid en viss spänning i förhållande till jord. Genom att klä kulan med ett lager paraffin som har genomslagsfastheten $E_{\text{gp}} = 4E_{\text{gl}}$ och $\epsilon_r = 2$ kan kulan laddas upp ytterligare, eftersom spänningen till jord kan ökas utan att gnistöverslag uppstår. Paraffinlagret har tjockleken $b - a$, där $b > a$. Lös följande uppgifter:

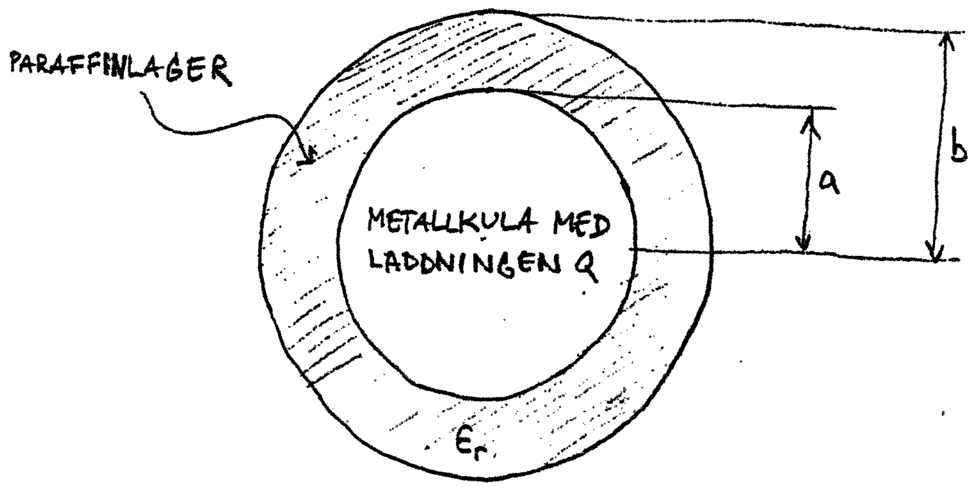
   (a) Beräkna $\vec{D}(\vec{r})$ överallt, det vill säga i luften och i paraffinet och inuti metallkulan. I ditt svar ska metallkulans totala laddning Q ingå. (2p)

   (b) Beräkna $\vec{E}(\vec{r})$ överallt, det vill säga i luften och i paraffinet och inuti metallkulan. I ditt svar ska metallkulans totala laddning Q ingå. (1p)

   (c) Beräkna $V(\vec{r})$ överallt, det vill säga i luften och i paraffinet och inuti metallkulan. I ditt svar ska metallkulans totala laddning Q ingå. (2p)

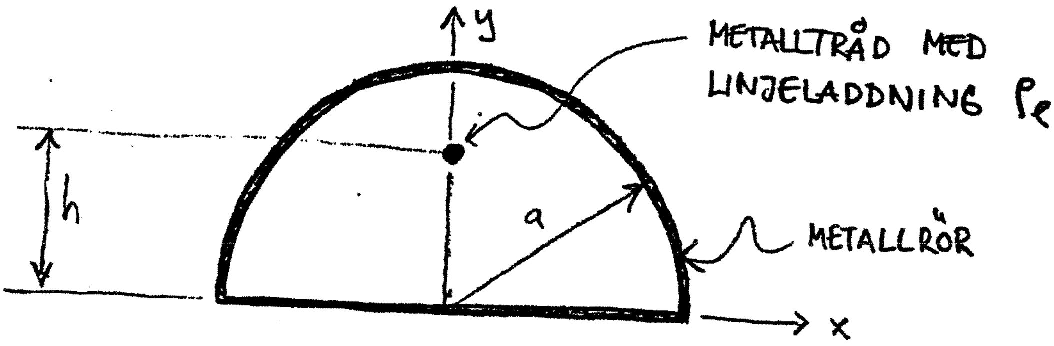
   (d) Betrakta situationen att man vill kunna ladda upp metallkulan till en så stor spänning som möjligt utan att få gnistöverslag varken i paraffinet eller i luften. Hur tjockt lönar det sig att göra paraffinlagret i förhållande till metallkulans radie? Observera att paraffinlagret inte ska vara onödigt tjockt! (3p)

   (e) Hur hög kan kulans maximala potential bli med det paraffinlager som bestämdes i uppgift (d)? Ditt svar får endast innehålla geometri och material parameterar samt genomslagsfasthet för paraffin. (2p)



3. Ett metallrör har formats så att dess tvärsnitt ger ett halvcirkelformat område som figuren visar. Inuti röret ligger en tunn metalltråd. Metallröret är jordat och metalltråden har linjeladdningstätheten ρ_l. Beräkna kraften på tråden. (10p)

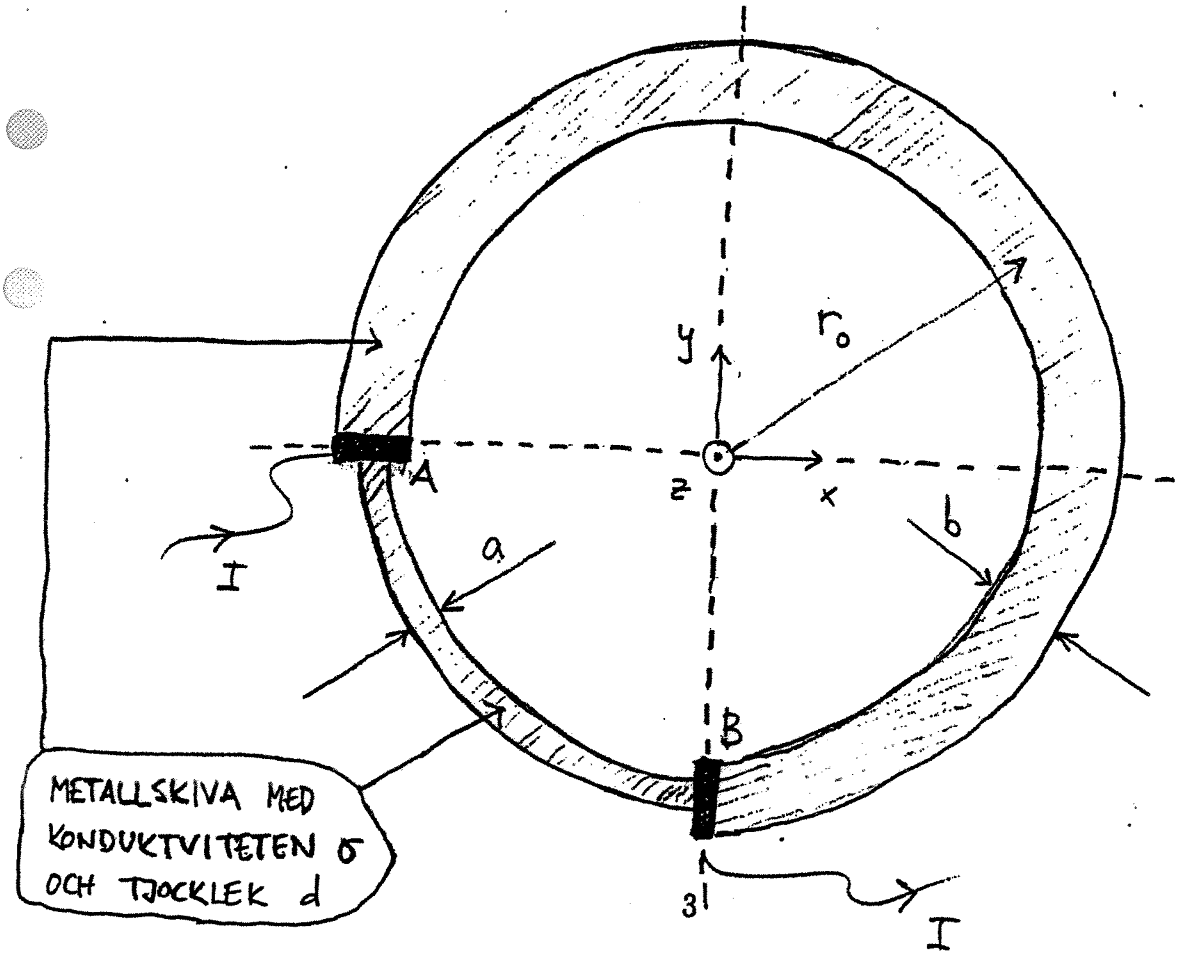
Ledning: Använd spegling.



4. En metallskiva med tjockleken d och konduktiviteten σ stansas så att den får den form som visas i figuren nedan. Måtten i figuren förhåller sig till varandra så att $r_0 \gg a$ och $r_0 \gg b$. Lös följande uppgifter:

   (a) Beräkna likströmsresistansen mellan punkten A och punkten B. De två inkopplingspunkterna A och B är elektriskt sett väl anslutna till den utstansade metallskivan och utformade så att deras inverkan på den totala resistansen är obetydlig. (5p)

   (b) Beräkna magnetfältet i origo om strömmen I flyter in till punkten A och ut från punkten B så som figuren visar. (5p)



5. En liten spole som för en långsamt varierande växelström är placerad i origo. Den lilla spolen karakteriseras av det magnetiska dipolmomentet $\vec{m}(t) = \hat{z}m_0\cos(\omega t)$. En cirkulär slinga med radien a rör sig med hastigheten v_0 längs z-axeln. Den har sin symmetriaxel längs z-axeln så att den ligger i planet $z(t) = v_0 t + z_0$, där $z(t) \gg a$ för alla tidpunkter t. Beräkna den inducerade strömmen $i(t)$ i den cirkulära slingan om den har resistansen R. Den inducerade strömmen är positiv då den flyter i $\hat{\varphi}$-riktningen och slingans självinduktans kan försummas. (10p)

6. En planvåg i luft infaller vinkelrätt mot ett halvoändligt område ($z > 0$) med en metall som har konduktiviteten σ och den relativa permeabiliteten $\mu_r = 1$. Planvågens frekvens är sådan att förhållandet $\omega\epsilon \ll \sigma$ är uppfyllt. Själva randytan mellan luften och metallen sammanfaller med planet $z = 0$ och i detta plan är det transmitterade magnetiska fältet $\vec{H}(z = 0, t) = \hat{y}H_0\cos(\omega t)$. Lös följande uppgifter:

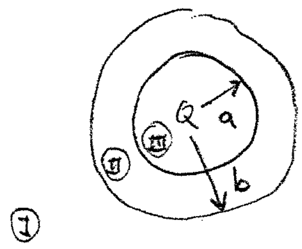
(a) Beräkna magnetfältet $\vec{H}(z,t)$ inuti metallen, det vill säga för $z > 0$. (4p)

(b) Beräkna strömtätheten $\vec{J}(z,t)$ inuti metallen, det vill säga för $z > 0$. (4p)

(c) Beräkna strålningstrycket $\int_0^\infty \vec{f}(z)dz$. Krafttätheten $\vec{f}(z)$ är tidsmedelvärdet av $\vec{J}(z,t) \times \vec{B}(z,t)$ inuti metallplattan. (2p)

Lösningsförslag till Elektromagnetiska fält för E3 - 15 dec 2005

(2)



(a) $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{inne}$ ger i område I & II:

$$D_R 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}^{I} = \vec{D}^{II} = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{R}$$

och i område III:

$$D_R 4\pi R^2 = 0 \Rightarrow \vec{D}^{III} = \vec{0}$$

(b) $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ger $\vec{E}^{I} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R}$, $\vec{E}^{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2}\hat{R}$, $\vec{E}^{III} = \vec{0}$

(c) $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_{L_{A\to B}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ger i område I:

$$V^{I}(R) - \underbrace{V_\infty}_{=0} = -\int_{L_{\infty\to R}} \vec{E}^{I}\cdot d\vec{l} = -\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \xi^2}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\xi}\right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

På samma sätt för område II

$$V^{II}(R) - \underbrace{V(b)}_{=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}} = -\int_{L_{b\to R}} \vec{E}^{II}\cdot d\vec{l} = -\int_R^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \xi^2}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,d\xi\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{-1}{\xi}\right]_R^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)$$

$$V^{II}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

I område III är $\vec{E}^{III} = \vec{0}$ vilket ger konstant potential

$$V^{III}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

(d) Stort E-fält ger överslag. I område I är elektriskt fält starkast vid $R=b$, motsvarande för område II är $R=a$.

$$E_{gl} = E^{I}(R=b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}, \quad E_{gp} = E^{II}(R=a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a^2}$$

$$\Rightarrow E_{gl} 4\pi\epsilon_0 b^2 = [Q] = E_{gp} 4\pi\epsilon_0\epsilon_r a^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\epsilon_r E_{gp}}{E_{gl}}} = \sqrt{8}$$

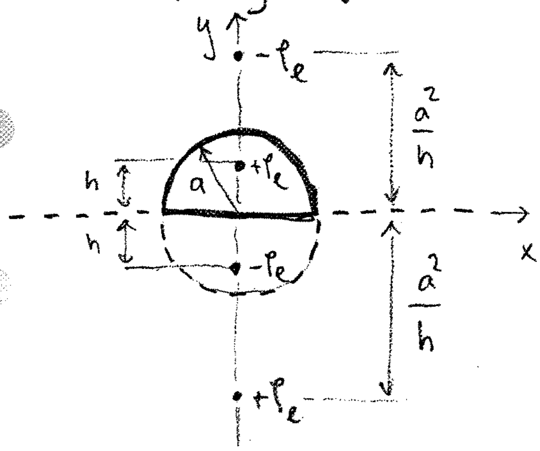
$$\text{tjockleken} = b-a = \sqrt{8}a - a = (\sqrt{8}-1)a$$

(e) Insättning ger

$$V_{max}^{III} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{enl. (d):}\\ E_{gp}\epsilon_r a^2 = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\end{array}\right\}$$

$$= E_{gp}\epsilon_r a^2\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right] = aE_{gp}\left[1 + \frac{a(\epsilon_r-1)}{b}\right]$$

3) Spegling ger



$$\vec{E}_{tråd} = \hat{y}\frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{a^2}{h}-h} - \frac{1}{2h} + \frac{1}{\frac{a^2}{h}+h}\right)$$

$$= \hat{y}\frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{h}{a^2-h^2} - \frac{1}{2h} + \frac{h}{a^2+h^2}\right)$$

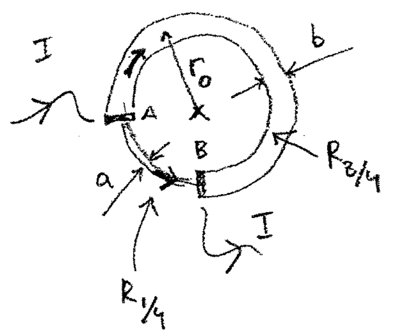
$$= \hat{y}\frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{2h^2(a^2+h^2) - (a^4-h^4) + 2h^2(a^2-h^2)}{(a^2-h^2)(2h)(a^2+h^2)}$$

$$= \hat{y}\frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{h^4+4h^2a^2-a^4}{2h(a^4-h^4)}$$

Kraft (för längd L)

$$\frac{\vec{F}}{L} = \hat{y}\frac{\rho_e^2}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{h^4+4h^2a^2-a^4}{2h(a^4-h^4)}$$

(4)



(a) Resistanserna $R_{3/4}$ och $R_{1/4}$ är parallellkopplade. Beräkna $R_{3/4}$ först: ström som flyter yttervarvet tillryggalägger sträckan $\frac{3\pi}{2}(r_0+b/2)$ och innervarvet $\frac{3\pi}{2}(r_0-b/2)$. Approx. $r_0 >> b$ ger att dessa är ungefär lika:

$$R_{3/4} = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{3\pi r_0}{2\sigma b d}$$

På samma sätt fås $R_{1/4} = \frac{\pi r_0}{2\sigma a d}$. För mindre skrivarbete införs $\xi = \pi r_0/(2\sigma d)$:

$$R_{1/4} = \xi/a \,, \quad R_{3/4} = 3\xi/b \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{1/4}}+\frac{1}{R_{3/4}}} = \frac{3\xi}{3a+b}$$

$$\Rightarrow R_{AB} = \frac{3\pi r_0}{(3a+b)2\sigma d}$$

(b) Strömdelning ger $I_{3/4} = \frac{R_{AB}}{R_{3/4}} I = \frac{3\xi\, b}{(3a+b)3\xi} I = \frac{b}{3a+b} I$

och pss $I_{1/4} = \frac{3a}{3a+b} I$. Biot-Savarts lag $(r_0 << b, r_0 << a)$

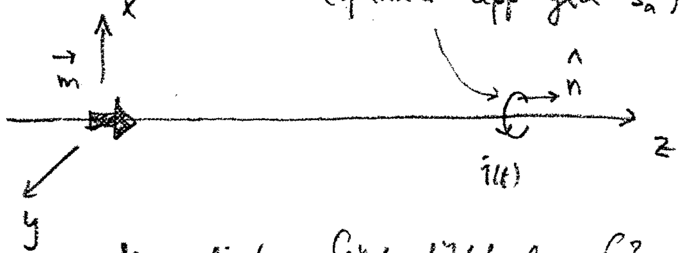
$$\vec{B}_{origo} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{L_{3/4}} \frac{I_{3/4}(-\hat{\varphi} r_0 d\varphi)\times(-\hat{r})}{r_0^2} + \int_{L_{1/4}} \frac{I_{1/4}(+\hat{\varphi} r_0 d\varphi)\times(-\hat{r})}{r_0^2}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^2}\left[-\hat{z}\,\frac{3\pi r_0}{2}\,\frac{b}{3a+b} I + \hat{z}\,\frac{\pi r_0}{2}\,\frac{3a}{3a+b} I\right]$$

$$= \hat{z}\,\frac{\mu_0 I}{8 r_0}\cdot\frac{3(a-b)}{3a+b}$$

(5)

slinga med radie a
(spänner upp yta S_a)



$\vec{m} = \hat{z}\, m_0 \cos(\omega t)$

Magnetisk flödestäthet från dipol:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(\hat{R}\, 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{använd över liten slinga m.} \\ \text{radien a på z-axel } (a \ll z) \\ \theta \simeq 0,\ R \simeq z \text{ och } \hat{R} \simeq \hat{z}\end{array}\right\} \simeq \hat{z}\,\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Flödet genom slingan blir

$$\phi = \int_{S_a} \vec{B}\cdot d\vec{s} \simeq B_z(z)\,\pi a^2 = \frac{\mu_0 m a^2}{2 z^3} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \cos(\omega t)}{2\,(v_0 t + z_0)^3}$$

Inducerad ström

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 m_0}{2R}\left[\frac{\omega \sin(\omega t)}{z^3} + \frac{3 v_0 \cos(\omega t)}{z^4}\right]$$

(6) (a) $\vec{H}(z) = \hat{y} H_0\, e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta}$ där $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\sigma\mu_0}} \Rightarrow \vec{H}(z,t) = \hat{y} H_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \dfrac{z}{\delta}\right)$

(b) Ampères lag (försumma förskjutningsströmmen fy $\omega\epsilon \ll \sigma$)

$$\vec{J} = \nabla\times\vec{H} = -\hat{x}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \hat{x} H_0 \frac{1+j}{\delta} e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta}$$

$$\vec{J}(z,t) = \hat{x}\frac{H_0}{\delta} e^{-z/\delta}\left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$

(c) Krafttätheten blir (med variabel $\xi = \omega t - z/\delta$)

$$\vec{f}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{J}\times(\mu_0\vec{H})\,dt = \frac{\hat{z}}{T}\int_{-z/\delta}^{2\pi - z/\delta} \frac{\mu_0 H_0^2}{\delta} e^{-2z/\delta}\cos\xi\left[\cos\xi - \sin\xi\right]\frac{d\xi}{\omega}$$

$$= \frac{\mu_0 H_0^2}{\underbrace{T\omega}_{=2\pi}\delta} e^{-2z/\delta}\left[\underbrace{\int_{-z/\delta}^{2\pi - z/\delta}\cos^2\xi\, d\xi}_{=\frac{2\pi}{2}} - \underbrace{\int_{-z/\delta}^{2\pi - z/\delta}\cos\xi\sin\xi\, d\xi}_{=0}\right] = \hat{z}\,\frac{\mu_0 H_0^2}{2\delta} e^{-2z/\delta}$$

Strålningstryck: $\displaystyle\int_0^\infty \vec{f}(z)\,dz = \hat{z}\,\frac{\mu_0 H_0^2}{2\delta}\left[\frac{e^{-2z/\delta}}{-2/\delta}\right]_0^\infty = \hat{z}\,\frac{\mu_0 H_0^2}{4}$