Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2005-04-02, kl 14.00-18.00, lokal hus V – kurskod EEM 015

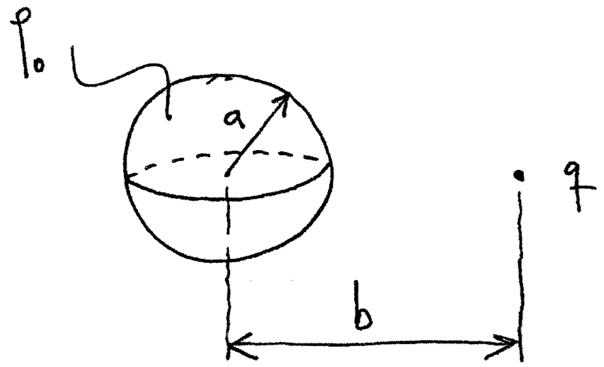
Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i Formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori
Besök under tentan	cirka kl 14.30 och kl 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Elektromagnetik
Lösningar	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2005-04-02
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2005-04-14
Granskning	Antennbiblioteket 2005-04-15 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

Teoriuppgift – Endast BETA får användas!

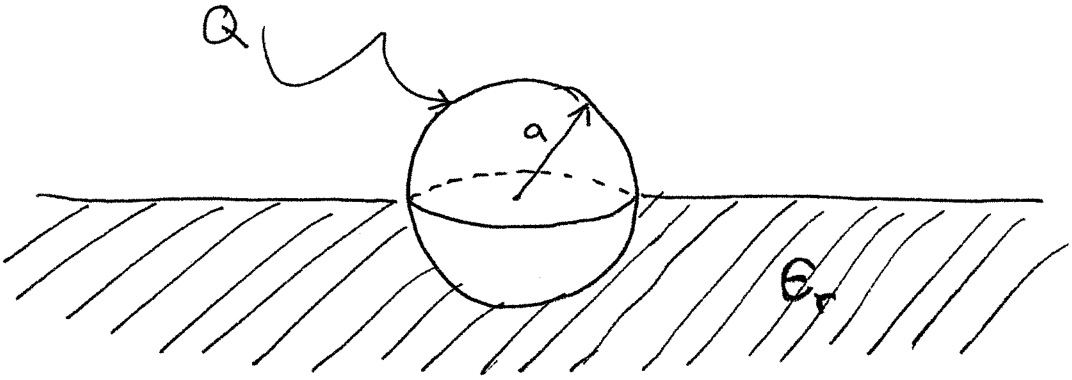
1 Utgå från Maxwells ekvationer: $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ och att aktuellt medium är källfritt, ickeledande och karakteriseras av ϵ och μ. Härled de homogena vågekvationerna för $\vec{E}$ och $\vec{H}$.

Räkneuppgifter – Hjälpmedel enligt listan ovan!

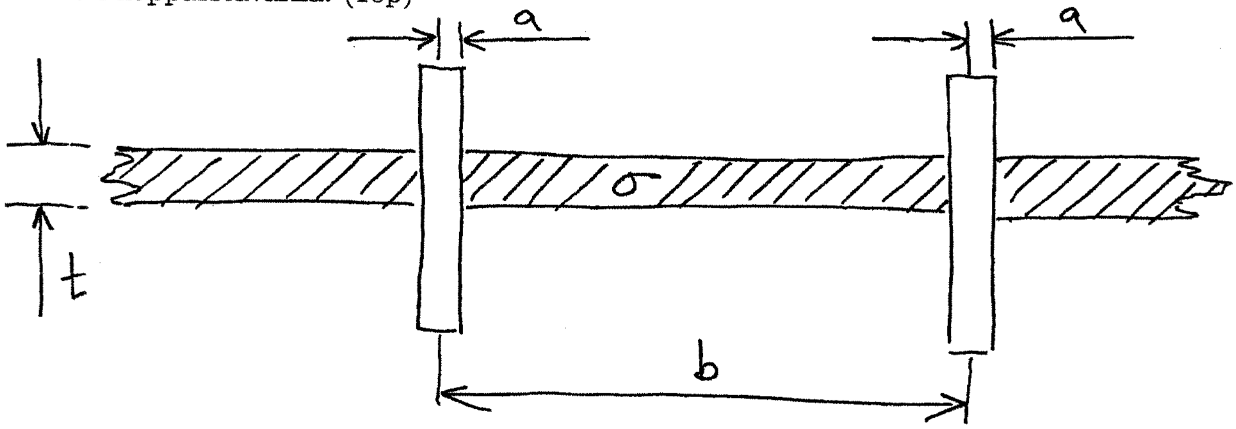
2 Figuren visar en homogen rymdladdningstäthet $\rho_0 > 0$ formad till ett klot med radien a. Beräkna det arbete som krävs för att flytta en punktladdning $q > 0$ från oändligheten till en punkt på avståndet $b > a$ från klotets centrum. (10p)



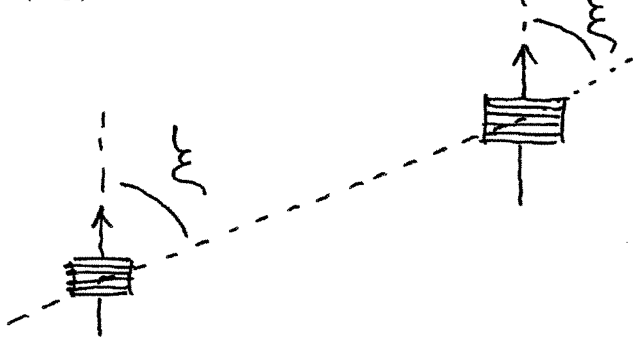
3 Ett dielektrikum med stor utsträckning har den relativa permittiviteten ϵ_r och en plan gränsyta mot luft. (Dielektrikat kan tänkas vara en vätska.) Bestäm den elektrostatiska potentialen V överallt då ett metallklot med radien a och laddningen Q placeras i gränsytan mellan luft och dielektrikum så som figuren visar. (10p)



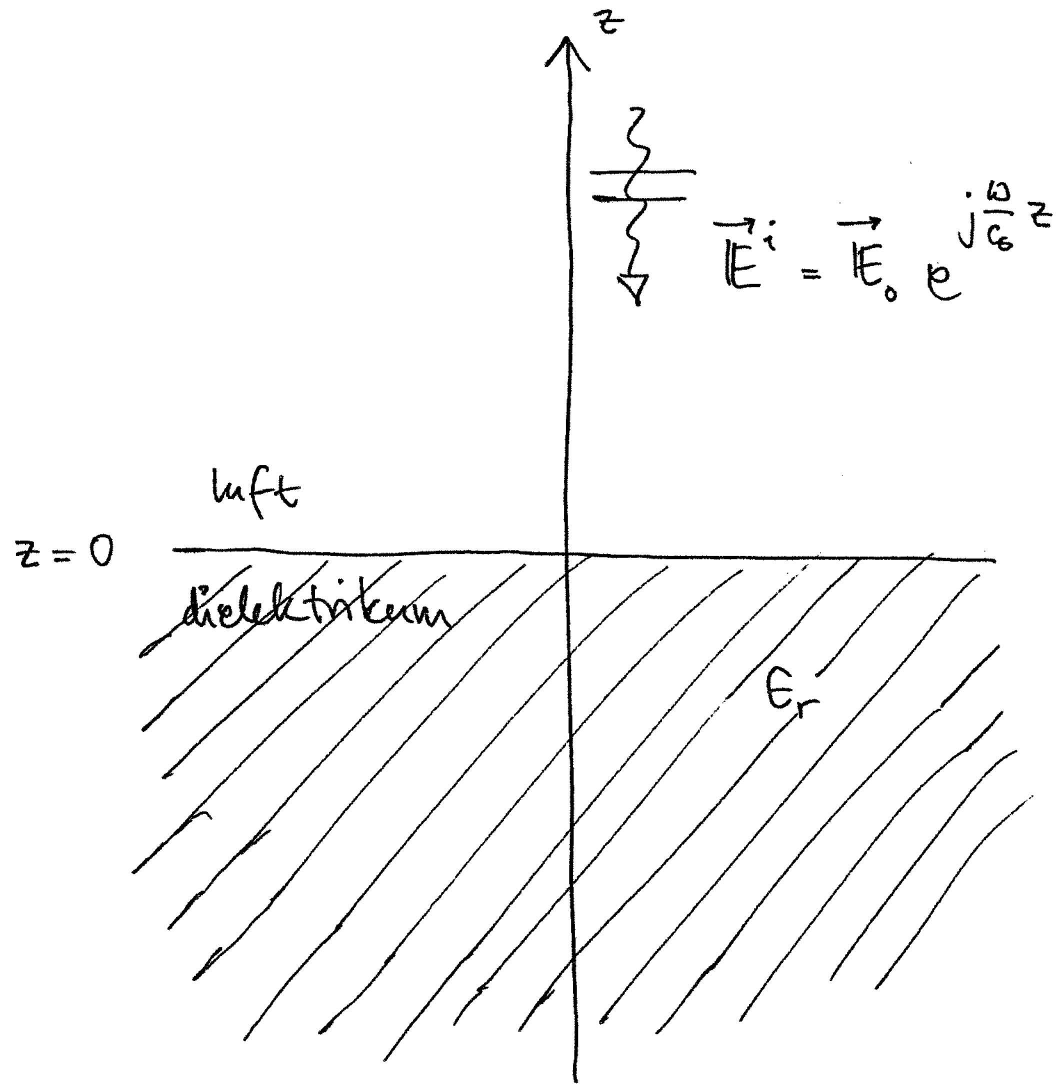
4 Två kopparstavar med cirkulärt tvärsnitt går vinkelrätt genom en stor skiva med tjockleken t och konduktiviteten σ. Kopparstavarna har radien a och det inbördes centrumavståndet $b \gg a$. Kopparstavarna är mycket goda ledare jämfört med skivan. Beräkna resistansen mellan kopparstavarna. (10p)



5 Figuren visar två små spolar med parallella axlar. Låt ξ beteckna vinkeln mellan spolarnas axlar och den linje som sammanbinder spolarnas centra. Bestäm ξ så att den ömsesidiga induktansen blir noll. (10p)



6 Ett förlustfritt dielektrikum med stor utsträckning har den relativa permittiviteten ϵ_r och en plan gränsyta mot luft. Dielektrikat upptar området $z < 0$ och luften upptar området $z > 0$ enligt figuren. En elektromagnetisk planvåg propagerar i luften mot dielektrikat och vågens vågvektor är vinkelrät mot gränsytan. Vid gränsytan sker en reflexion och den reflekterade vågen har halva amplituden jämfört med den infallande vågen. Beräkna dielektrikats relativa permittivitet ϵ_r. (10p)



Lösningsförslag till tentamen i elektromagnetiska fält för E3 (EEM015) den 2 april 2005.

---

(2) ~~Vid förflyttning $\vec{dl}$ är de elektriska krafternas~~ arbete $dA_e = \vec{F}_e \cdot \vec{dl}$ där $\vec{F}_e = q\vec{E}$ med

$$\vec{E} = \hat{R}\,\frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \hat{R}\,\frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 R^2} \qquad (R>a)$$

Integration ger

$$A_e = \int_b^\infty q\left(\hat{R}\,\frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 R^2}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,dR\right) = \frac{q\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}\int_\infty^b \frac{dR}{R^2}$$

$$= \frac{q\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R}\right]_\infty^b = -\frac{q\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 b}$$

För att flytta laddningen från oändligheten till $R=b$ åtgår därför arbetet

$$A = -A_e = \frac{q\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 b}$$

---

(3) Ansatsen $\vec{E} = \hat{R}\,\vartheta/R^2$ uppfyller elektrostatikens postulat och randvillkoren, t.ex. $V=$ konstant för $R=a$ och $V=0$ för $R=\infty$. Enligt entydighetssatsen är detta lösningen vi söker och det återstår endast att bestämma konstanten ϑ.

Med $E_R = \vartheta/R^2$ fås $D_R = \epsilon_0 \vartheta / R^2$ då $z > 0$ och $D_R = \epsilon_0 \epsilon_r \vartheta / R^2$ då $z < 0$. Gauss lag (med koncentrisk sfärisk Gaussyta S) ger

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \frac{\epsilon_0 \vartheta}{R^2} \cdot 2\pi R^2 + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \vartheta}{R^2} \cdot 2\pi R^2$$

$$= 2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) \vartheta = Q$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)}$$

Potentialen blir därmed

$$V(R) - V_\infty = - \int_R^\infty \left(\hat{R} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1+\epsilon_r) \xi^2} \right) \cdot (-\hat{R} d\xi)$$

$$= \left[- \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1+\epsilon_r) \xi} \right]_R^\infty = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1+\epsilon_r) R}$$

och med $V_\infty = 0$ får man

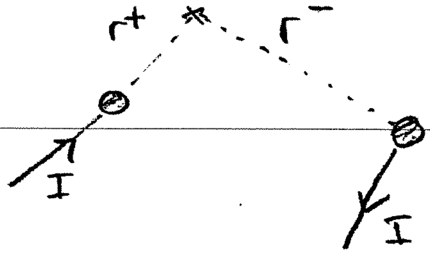
$$V(R) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) R}$$

då $R > a$ och för $R \leq a$ är potentialen konstant

$$V_{klot} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) a}$$

(4) Potentialen i skivans plan är

$$V(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right)$$



där I är den totala strömmen som går från pluspolen till minuspolen. Vid pluspolen blir potentialen

$$V_+ = \frac{I}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

och vid minuspolen är den

$$V_- = \frac{I}{2\pi\sigma t} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Resistansen blir då

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V_+ - V_-}{I}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma t}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right] = \frac{\ln(b/a)}{\pi\sigma t}$$

(5) Ömsesidig induktans är noll då ömsesidigt flöde är noll. Fält från liten spole är

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(\hat{R}\,2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

z-komponenten ges av $B_z = \vec{B}\cdot\hat{z}$ och med hjälp av $\hat{z}\cdot\hat{R} = \cos\theta$ samt $\hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta$ får man

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

Då $B_z = 0$ är det ömsesidiga flödet noll och därmed även den ömsesidiga induktansen.

$$2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\sqrt{2}$$

Alltså är den ömsesidiga induktansen noll då $\xi = \arctan\sqrt{2}$.

(6) Reflexionskoefficient för elektriskt fält är amplituden hos den reflekterade vågen delat med amplituden för den infallande vågen. Enligt texten är denna kvot $|r| = 1/2$ och formelsamlingen ger

$$|r| = \left| \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \right| = \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \\ \quad = Z_0 / \sqrt{\epsilon_r} \end{array} \right\}$$

$$= \left| \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \right| = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_r = \left(\frac{1 + |r|}{1 - |r|} \right)^2 = \left(\frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} \right)^2 = 9$$