Tentamen i Elektromagnetiska fält för E3

2004-12-17, kl 14.00-18.00, lokal hus M – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamlig i ~~Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator~~ men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i Formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori
Besök under tentan	cirka kl 14.30 och kl 17.00
Förfrågningar	Tel. ankn. 1735 Thomas Rylander, Elektromagnetik
Lösningar	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2004-12-17
Resultatet	Anslås vid Linsen och på kursens hemsida 2004-01-13
Granskning	Antennbiblioteket 2004-01-19 kl 12.00-13.00 Antennbiblioteket 2004-01-21 kl 12.00-13.00
Betygsgränser	Tentan 3: 25p; 4: 37p; 5: 48p. 10p/uppgift Max 2 bonuspoäng får användas för att nå godkänt.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

Teoriuppgift – Endast BETA får användas!

1 Skriv ned de koordinatoberoende definitionerna av nedanstående deriveringsoperationer på fält och beskriv dem också i ord!

(a) Gradienten, (3p)

(b) Divergensen, (3p)

(c) Rotationen. (4p)

Räkneuppgifter – Hjälpmedel enligt listan på försättsbladet!
Addera dina poäng från årets dugga till poängen på uppgift 2.
Dock max 10p på uppgift 2.

2 Figuren visar en sfärisk kondensator som består av två metallsfärer. Den mindre metallsfären har radien a och är centrerad i den större metallsfären som har radien b där $b > a$. Det medium som finns mellan metallsfärerna har permittiviteten ϵ.

Ett batteri med spänningen U kopplas med minuspolen till den yttre sfären och med pluspolen till den inre sfären. Efter uppladdning av kondensatorn har den inre sfären laddningen $+Q$ och den yttre sfären har laddningen $-Q$. Den yttre sfären är jordad. Lös följande uppgifter.

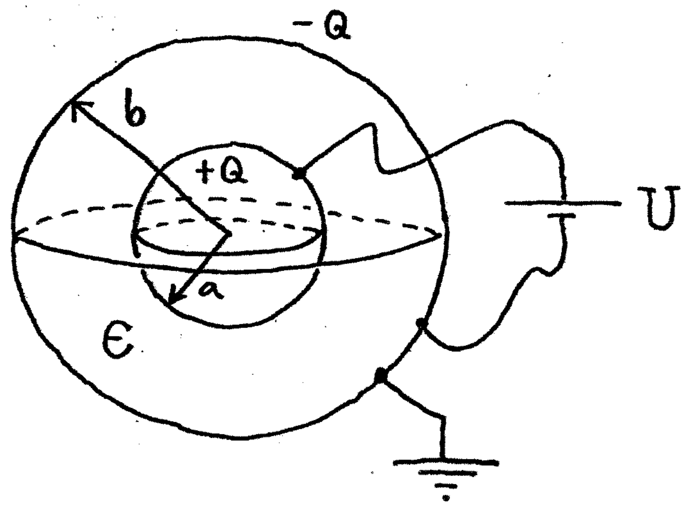
(a) Beräkna den elektriska flödestätheten $\vec{D}(\vec{r})$. (2p)

(b) Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r})$. (1p)

(c) Beräkna den elektriska potentialen $V(\vec{r})$. (2p)

(d) Beräkna kapacitansen C för den sfäriska kondensatorn. (2p)

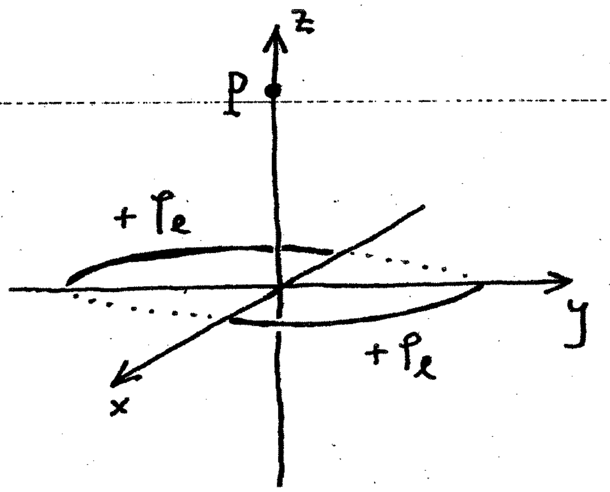
(e) En sfärisk kondensator kan användas som en grovt förenklad elektrostatisk modell för jordens atmosfär. Jordens yta motsvaras då av den inre sfären och med jordens radie blir $a = 6367$ km. På höjden 50 km över jordytan är luften en god ledare och denna höjd är på avståndet b till jordens mittpunkt. Permittiviteten är ϵ_0 i den grova modellen. Vid marken är det elektriska fältet 100 V/m och riktat mot jordens mittpunkt (omvänd polaritet jämfört med figuren). Utan hänsyn till tecken, beräkna hur stor laddningen Q blir för en sfärisk kondensator som elektrostatiskt liknas vid jordens atmosfär. (3p)

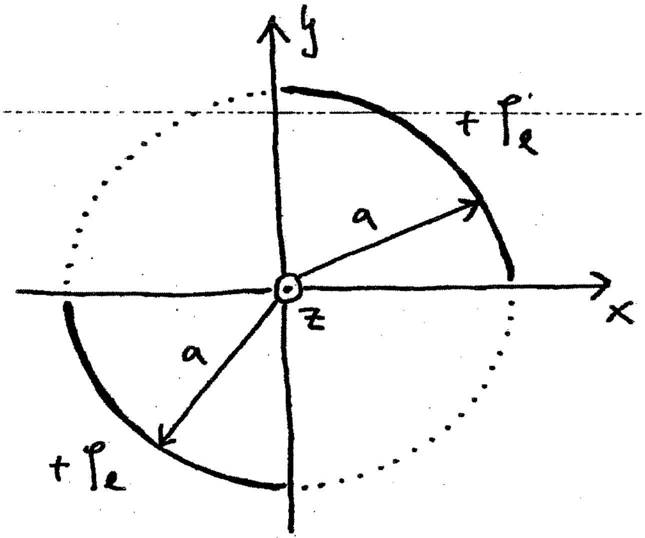


3 I xy-planet ligger två linjeladdningar enligt figur. Linjeladdningarna är placerade symmetriskt på varsin sida om z-axeln och origo. Båda linjeladdningarna har konstant laddningstäthet ρ_l och båda är formade som en fjärdedels cirkelbåge med radien a mätt från origo.

(a) Beräkna den elektriska potentialen $V(0,0,z)$ i punkten P på z-axeln. (5p)

(b) Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}(0,0,z)$ i punkten P på z-axeln. (5p)

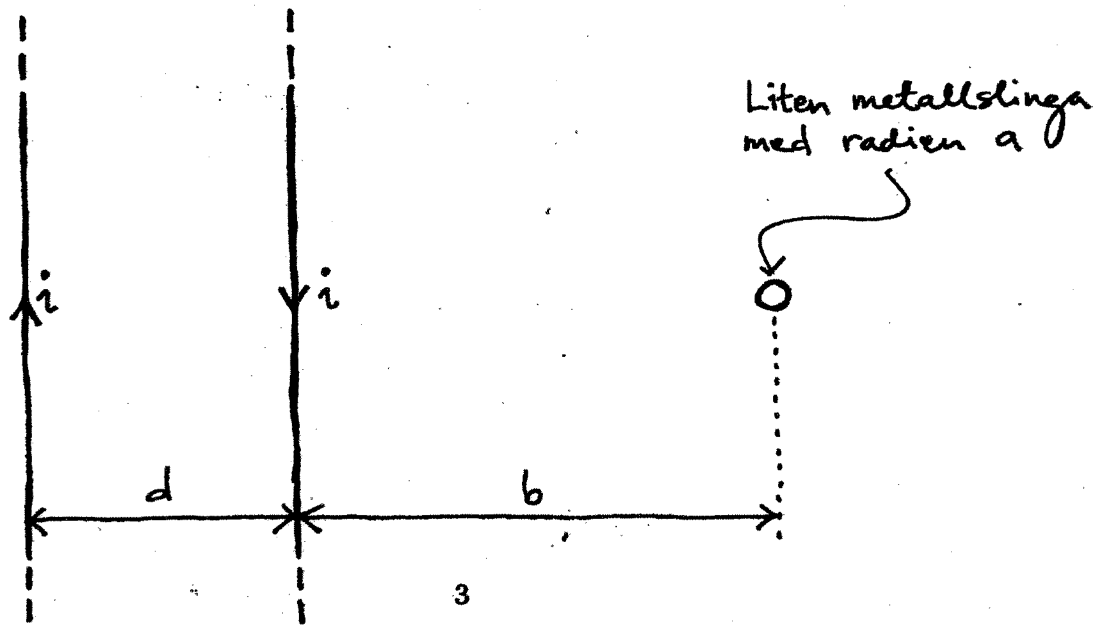




4 Två mycket långa raka strömförande ledare ligger på en bordskiva brevid en mycket liten cirkulär metallslinga så som figuren visar. Den cirkulära slingans radie a är mycket mindre än dess avstånd till de raka strömförande ledarna. Lös följande uppgifter.

(a) Beräkna flödet Φ genom den cirkulära metallslingan. Positiv riktning för flödet i figuren nedan är ut ur pappret. (6p)

(b) Beräkna den ömsesidiga induktansens belopp vilken beskriver magnetisk koppling mellan den cirkulära metallslingan och de raka strömförande ledarna. (4p)

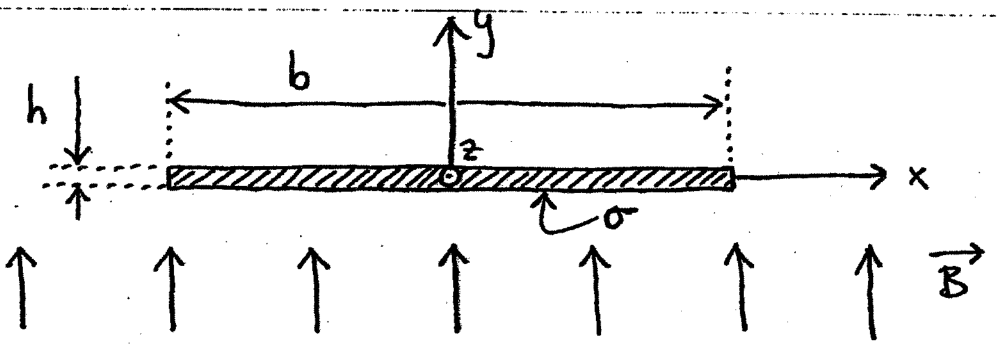


5 En lång rak bandformig ledare befinner sig i en homogen magnetisk flödestäthet $\vec{B}$ enligt figur. Den magnetiska flödestätheten $\vec{B} = \hat{y}B_0\cos(\omega t)$ är homogen i rummet, vinkelrät mot bandets bredd och sinusformigt varierande med tiden. Den bandformade ledaren har konduktiviteten σ, bredden b och en mycket liten tjocklek h. Magnetfältet från de inducerade strömmarna är försumbart jämfört med det givna fältet. Lös följande uppgifter.

(a) Beräkna det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r})$ inuti bandet. (5p)

(b) Beräkna medeleffektutvecklingen per längdenhet av bandet. (5p)

Ledning: Utnyttja symmetrin och fomeln $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -d\Phi/dt$.

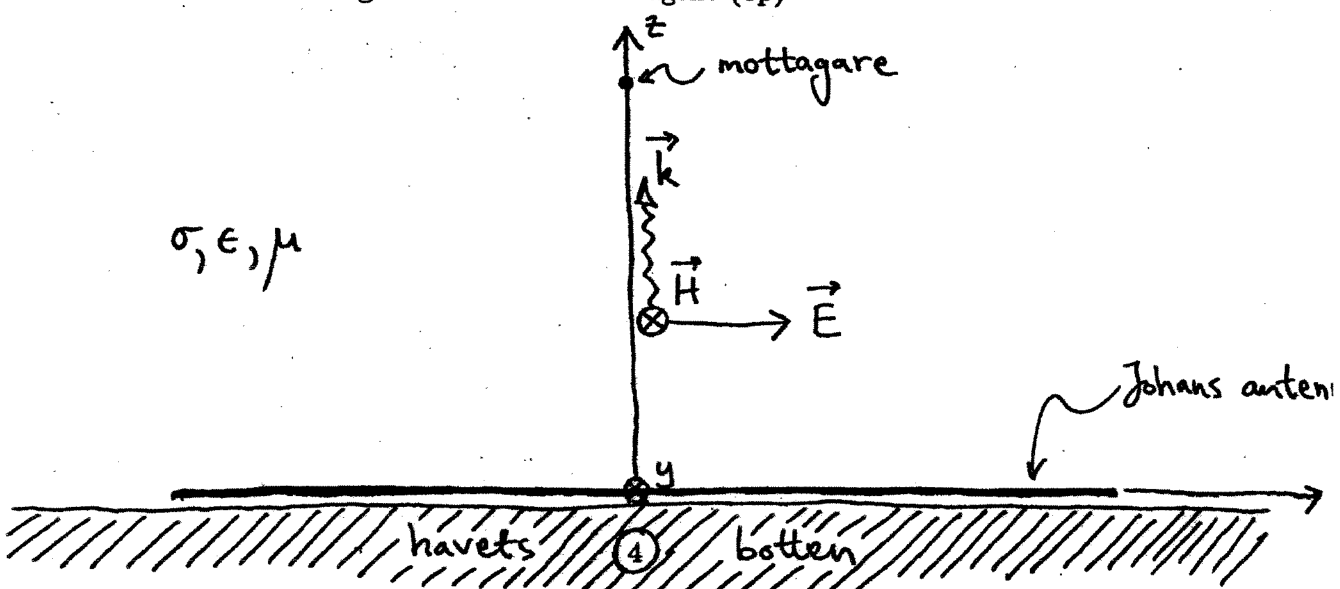


6 På havets botten har Johan lagt ut en stor antenn enligt figur. När antennen sänder skapas en planvåg $\vec{E}(z,t) = \hat{x}E_0e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)$. På havsbotten (där antennen ligger) är $z = 0$ och i vattnet ovanför antennen är $z > 0$. Frekvensen är $f = 200$ Hz och det elektriska fältets styrka vid antennen är $E_0 = 100$ V/m. Havsvattnet har konduktiviteten $\sigma = 4$ S/m och den relativa permittiviteten $\epsilon_r = 72$. Den relativa permeabiliteten för vatten är $\mu_r = 1$. Antennen ligger på så stort djup att reflexion från havsytan är försumbar. Lös följande uppgifter.

(a) Ta fram siffervärdet för α. (2p)

(b) Ta fram siffervärdet för β. (2p)

(c) En känslig mottagare i vattnet ovanför antennen kan uppfatta ett elektriskt fält som överstiger 10^{-6} V/m. Hur nära sändarantennen och havsbotten måste mottagaren vara för att kunna registrera den utsända vågen? (6p)



$\boxed{2}$

(a) Sfärisk symmetri $\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \hat{R}\, D_R(R)$

Gauss lag $\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \oint_{S=\ominus} (\hat{R} D_R(R)) \cdot (\hat{R}\, ds) = Q_{inne}$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 D_R(R) = Q_{inne}$$

$$\therefore \vec{D}(R) = \hat{R} \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{då} \quad a < R < b$$

[$\vec{D} = \vec{0}$ för alla punkter inuti liten sfär och utanför stor sfär]

(b) $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon} = \hat{R} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$

(c) $V(R) - \cancel{V(b)}^{\,0 \text{ ty jord}} = -\int_R^b \left(\hat{R} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \right) \cdot (-\hat{R}\, dR)$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_R^b \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right)$$

(d) $U = V(a) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \right)$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}$$

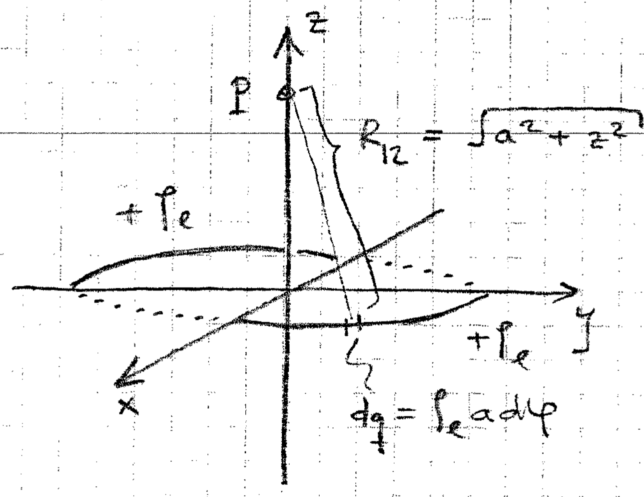
(e) Vid jorden är $E(a) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ given.

$$Q = E(a) \cdot 4\pi\epsilon_0 a^2 = 451 \text{ kAs}$$

då $E(a) = 100$ V/m och $a = 6367$ km

$\boxed{3}$

(a)



Bidrag dV till potentialen från laddning dq ges av

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}$$

Potentialen fås genom integration

$$V(0,0,z) = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_\ell a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\,d\varphi + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\rho_\ell a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\,d\varphi$$

$$= \frac{\rho_\ell a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\rho_\ell a}{4\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

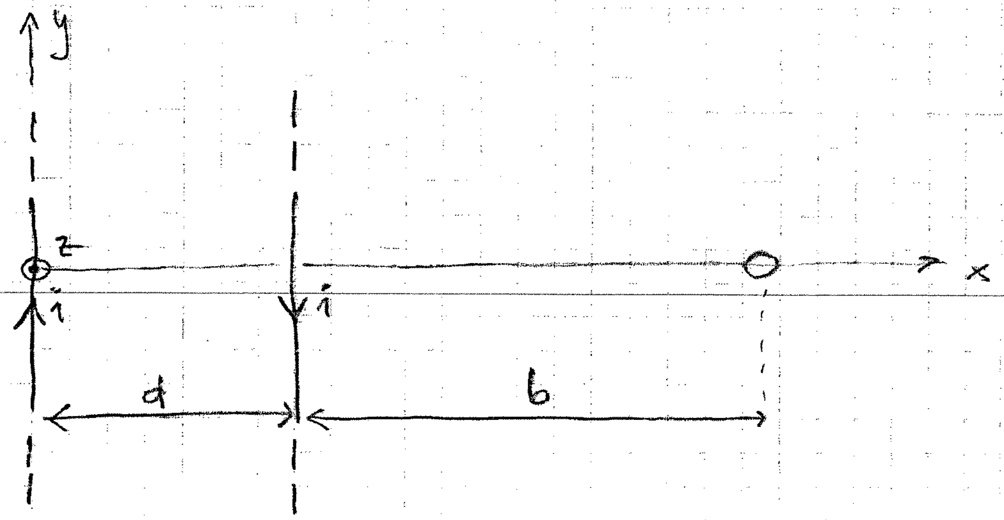
(b) Elektriskt fält på z-axeln har <u>endast</u> z-komponent på grund av symmetrin

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho_\ell a}{4\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

$$= \hat{z}\,\frac{\rho_\ell a z}{4\epsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

$\boxed{4}$

(a)



Magnetisk flödestäthet från rak tråd ges av $\vec{B} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ och med superposition fås i slingans mittpunkt

$$\vec{B} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi b} - \hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi (b+d)} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}\right)$$

Flödet (med positiv riktning ut ur pappret) genom slingan blir

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{S_0} \left(\hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}\right)\right)\cdot\left(\hat{z}\,ds\right)$$

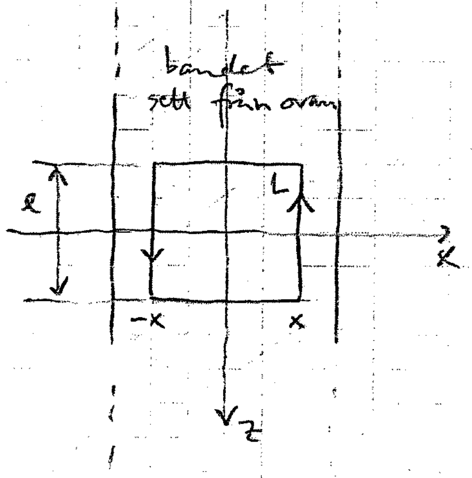
$$\doteq \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}\right)\pi a^2 = \frac{\mu_0 i a^2 d}{2b(b+d)}$$

(b) Ömsesidiga induktansens belopp

$$|M| = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 a^2 d}{2b(b+d)}$$

$\boxed{5}$ Strömtätheten beror endast av x

(a) och vi har $\vec{J}(\vec{r}) = \hat{z}\, J_z(x) = \hat{z}\,\sigma E_z(x)$.
På grund av symmetrin har vi att $E_z(-x) = -E_z(x)$ och samma sak gäller för strömtätheten.



$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow -lE_z(x) + l\,E_z(-x) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[2x\, l\, B_0 \cos(\omega t)\right]$$

$$\Rightarrow E_z(x) = -x\, B_0 \omega \sin(\omega t)$$

(b) Momentan effektutveckling (= ögonblicksvärde)

$$p(x) = \vec{J}(x)\cdot\vec{E}(x) = \sigma E_z^2(x) = \sigma x^2 B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

$$P = \int_V p(x)\, dv = h\, l \int_{-b/2}^{b/2} \sigma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)\, x^2 dx$$

$$= h\, l\, \sigma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx}_{= b^3/12} = h\, l\, \sigma B_0^2 \omega^2 \frac{b^3}{12} \sin^2(\omega t)$$

$$\frac{P_{medel}}{l} = \frac{h\sigma B_0^2 \omega^2 b^3}{24}$$

eftersom $\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{2}$. Kan också lösas med $j\omega$

$\boxed{6}$ Kolla först förhållandet mellan σ och $\omega\epsilon$.

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{2\pi \cdot 200 \cdot 72 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \simeq 5 \cdot 10^{6}$$

vilket är mycket större än ett $\Rightarrow$ god ledare

(a) God ledare ger (enl. hjälpmedel)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \left(\frac{2\pi \cdot 200 \cdot 4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2}\right)^{1/2}$$

$$\simeq 5.62 \cdot 10^{-2}$$

(b) God ledare ger (enl. hjälpmedel)

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \left\{\text{samma som (a)}\right\} \simeq 5.62 \cdot 10^{-2}$$

(c) Vågen registreras om (för något t)

$$10^{-6} = E_{min} < \left| E_0 \, e^{-\alpha z} \cos(2\pi f t - \beta z) \right|$$

vilket ger

leta efter gränsen

$$E_{min} < E_0 e^{-\alpha z} \Rightarrow e^{-\alpha z} = \frac{E_{min}}{E_0}$$

$$\Rightarrow -\alpha z = \ln\left(\frac{E_{min}}{E_0}\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{\ln(E_0/E_{min})}{\alpha} \simeq 328 \text{ m}$$

Vågen får vara max 328 m från sändaren.