Dugga i Elektromagnetiska fält för E3

2004-10-15, kl 15.00-17.00, elektromagnetik – kurskod EEM 015

Tillåtna hjälpmedel	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i Formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar	Tel. ankn. 1581, Eva Palmberg, Elektromagnetik
Examinator	Tel. ankn. 1735, Thomas Rylander, Elektromagnetik
Lösningar	Anslås vid DC och på kurshemsidan
Resultatet	Anslås senast 8/11 vid DC
Granskning	Tisdag 9/11 och onsdag 10/11 kl 12-13 hos Thomas Rylander i rum 7324, EDIT-huset
Betygsgränser	10p/uppgift. Hälften av duggapoängen (avrundat uppåt till heltal) adderas till poängen på uppgift 2 på ordinarie tentan. Dock max 10p på uppgift 2.
Kom ihåg	Tydliga figurer, referensriktningar, dimensionskontroll och motiveringar.

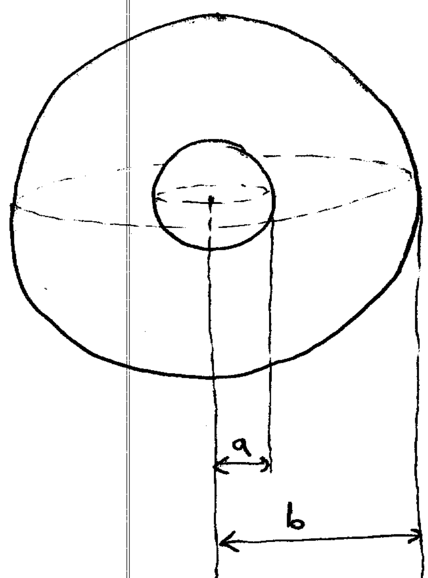
1 Ett sfäriskt metallskal med radien b har en total laddning Q. Centrerat i detta metallskal finns ett annat metallskal med radien a och potentialen noll – radien a är naturligtvis mindre än radien b. Vad är den elektrostatiska energin associerad med detta system? (10p)

2 Du har just börjat på ditt första jobb och ni har just fått in ett nytt uppdrag. Givet en mycket tunn plastskiva gäller det att ta reda på permittiviteten för plasten. Du kollar in företagets verkstad och där hittar du en kapacitansmeter och två stora metallplattor. Efter att ha mätt upp längd och area för alla delar konstruerar du en kondensator genom att centrera plastskivan mellan metallplattorna – metallplattorna har större area än plastskivan så det blir luft över längs kanterna. Kapacitansmetern är enkel att använda och du har snart ett bra värde på kapacitansen. Det enda problemet som återstår är att relatera dina mätningar till den sökta permittiviteten. Hur kan plastens permittivitet uttryckas i termer av den uppmätta kapacitansen samt dina längd- och ytmåtten? (10p)

DUGGA 2004-10-15 kl 15.00 - 17.00

1) $W_e = \frac{1}{2}\sum_k Q_k V_k$ där Q_k är laddningen på och V_k är potentialen för metallkropp k.

Indexera skalen med deras radier a och b.



Man vet att

$$V_a = 0$$

$$Q_b = Q$$

men däremot är Q_a och V_b okända. Dessa två obekanta kan bestämmas genom att två ekvationer vilka båda innehåller Q_a och V_b som obekanta och resten som kända storheter. Gauss lag ger

$$\vec{E} = \frac{Q_{inne}}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R}$$

då vi har sfärisk symmetri vi använder detta att räkna ut V_b (i termer av Q_a) på två olika sätt.

$$\text{(I)}\quad V_b - V_\infty = -\int_{L_{\infty\to b}} \left(E_R(R)\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,dR\right)$$

dessa är noll

$$= -\int_b^\infty \left(\frac{Q+Q_a}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R}\right)\cdot\left(-\hat{R}\,dR\right)$$

$$= \frac{Q+Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R}\right]_b^\infty = \frac{Q+Q_a}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\text{(II)}\quad V_b - V_a = -\int_{L_{a\to b}} \left(E_R(R)\hat{R}\right)\cdot\left(+\hat{R}\,dR\right)$$

$$= -\int_a^b \left(\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R}\right)\cdot\left(+\hat{R}\,dR\right)$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R}\right]_a^b = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

Genom att sätta (I) och (II) lika får man

$$\frac{Q+Q_a}{4\pi\epsilon_0 b} = \left[V_b\right] = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow Q_a = -\frac{a}{b}Q$$

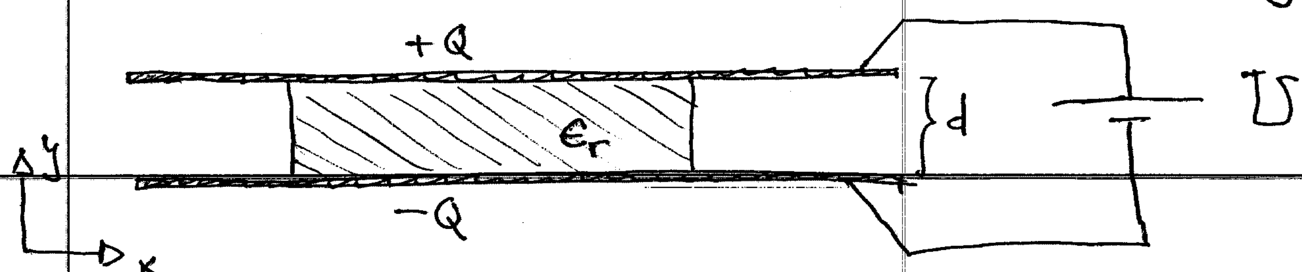
Elektrostatisk energi blir nu

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_a V_a + Q_b V_b\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} Q \cdot \frac{Q + Q_a}{4\pi \epsilon_0 b}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 (1 - a/b)}{4\pi \epsilon_0 b} = \frac{Q^2 (b-a)}{8\pi \epsilon_0 b^2}$$

2) Man behöver uttrycka t.ex. laddningen $\pm Q$ på plattorna i termer av pålagd spänning U.



Försummade ändeffekter (figur ovan är ej i proportion) ger konstant $\vec{E}$ mellan plattorna:

$$V_{\text{övre}} - V_{\text{undre}} = -\int_{L_{\text{undre}\to\text{övre}}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_0^d (+E_y \hat{y}) \cdot (\hat{y}\, dy) = -E_y d = U$$

vilket ger $E_y = -U/d$ oavsett om man integrerar i eller utanför dielektrikat (naturligtvis mellan plattorna).

$$D_y = \begin{cases} -\epsilon_0 \epsilon_r U/d & \text{i dielektrikat} \\ -\epsilon_0 U/d & \text{utanför dielektrikat} \end{cases}$$

Man får laddningen genom Gauss lag

$$Q_{inne} = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \left\{ \begin{matrix} \text{Låt ytan } S \text{ omsluta} \\ \text{den övre kondensatorplattan} \end{matrix} \right\}$$

$$= \oint_S (D_y \hat{y}) \cdot (-\hat{y}\, ds)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U}{d} \cdot A_d + \frac{\epsilon_0 U}{d}(A_k - A_d) = Q$$

där A_d = dielektriska skivans area och A_k = kondensatorplattans area. Kapacitansen blir

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0}{d}\left(\epsilon_r A_d + A_k - A_d\right)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 \cdot \frac{Cd/\epsilon_0 - A_k + A_d}{A_d}$$