Fält EMFd5 Dugga i elektromagnetiska fält för E3
den 22/10 2003, 14.15-16.15, hus M
Kurskod EEM 015

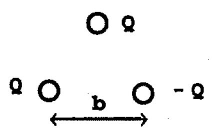
Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men **inga** egna anteckningar utöver egna **formler** på sista bladet i Formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Frågor	tel ankn 1581, Eva Palmberg, Elektromagnetik
Lösningar	anslås vid linsen och på hemsidan
Resultat	anslås senast 3/11 vid linsen
Granskning	tisd. 4/11, onsd. 5/11 kl 12-13 i mitt rum nr 7322 på plan 7 i ED-huset
Betygsgränser	10 p/uppgift Hälften av duggapoängen (avrundat uppåt till heltal) adderas till tentapoängen på uppgift 2 på **ordinarie** tentan. Dock max 10p på uppgift 2.
Kom ihåg!	Tydliga figurer. Referensriktningar, Dimensionskontroll, Motiveringar

1a En sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning ger upphov till potentialen

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{för } R>a \quad \text{och} \quad V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad \text{för } R\leq a$$

Sfäriska koordinater, ε_0 överallt. Bestäm laddningsfördelningen! 5p

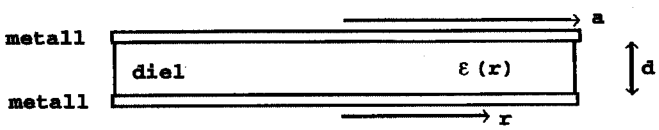
1b Tre **små** metallkulor med radien a har laddningarna Q, Q resp. -Q. Medelavstånden mellan kulorna är b, se fig.! Bestäm systemets elektrostatiska energi W_e! 5p



2a En cirkulär plattkondensator med radie a och plattavstånd d är fylld med ett **inhomogent** dielektrikum. Den relativa permittiviteten ε_r beror av radien r enligt $\varepsilon_r(r) = 2 - (r/a)^2$ Beräkna kapacitansen C för denna kondensator! 8p

Ledning: Ytladdningstätheten på metallen kommer att bero av radien r! Ansätt därför $\pm\rho_s(r)$ på plattorna!

$\rho_s \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow \Delta V \rightarrow Q \rightarrow C=Q/\Delta V$



2b Hur kan man veta att ρ_s kommer att bero av r? Är det något i dina beräkningar som visar detta? Förklara kort! 2p

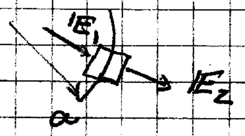
Eva Palmberg

Lösningar till Dugga i Elektromagnetiska fält

EMFd5 för E3 2003-10-22 EP

1a/ $\mathbb{E} = -\nabla V = -\hat{R}\frac{dV}{dR}$; $\mathbb{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ $R>a$ $\mathbb{E}_1 = 0$ $R<a$

$\underline{\varrho} = \varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbb{E} = \underline{0}$ $R>a$, $R<a$ men $\mathbb{E}$ har ett språng vid $R=a$:

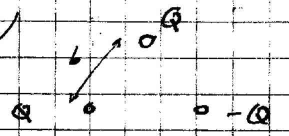


Gauss lag vid $R=a$

$\oint \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = E_2(a)\cdot\Delta S - E_1(a)\Delta S = E_2(a)\Delta S =$

$= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{innesl} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_s \Delta S \Rightarrow \underline{\underline{\varrho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}}}$ vid $R=a$

1b/

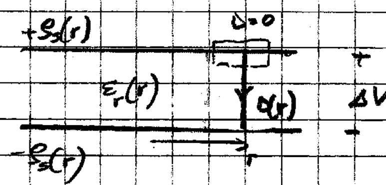


Laddn. på metall $W_e = \frac{1}{2}\sum q_{metalla} V_{metall} =$

$= \frac{1}{2}Q\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]\cdot 2 +$

$+ \frac{1}{2}(-Q)\left[\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\cdot 2\right] = \underline{\underline{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3}{a} - \frac{2}{b}\right]}}$

2a/



Ansätt $\pm\varrho_s(r)$ på metallplattorna.

Gauss lag $\Rightarrow$ $\oint \mathbb{D}\cdot d\mathbb{S} = D(r)\Delta S + \underbrace{D_{metall}}_{0}\Delta S =$

$= Q_{fri,\,innesl} = \varrho_s(r)\Delta S$ $\Rightarrow D(r) = \varrho_s(r)$ (1)

$\varepsilon_r(r) = 2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2$

$\Rightarrow E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r(r)}$ (2) $\Rightarrow$ Potentialskillnad $\Delta V = \int_0^d E(r)\cdot dl = E(r)\cdot d =$

$=$ konst (oberoende av r) $\Rightarrow E(r) = \frac{\Delta V}{d}$ (3)

ins av (3) och (2) i (1) $\Rightarrow \varrho_s(r) = \varepsilon_0\varepsilon_r(r)\frac{\Delta V}{d}$

$\Rightarrow$ laddn. Q på plattorna $Q = \int_{r=0}^{a}\varrho_s(r)\,2\pi r\,dr = \frac{2\pi\varepsilon_0\Delta V}{d}\int_{r=0}^{a}\varepsilon_r(r)\,r\,dr =$

$= \frac{2\pi\varepsilon_0\Delta V}{d}\int_{r=0}^{a}\left[2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]r\,dr = \frac{2\pi\varepsilon_0\Delta V}{d}\cdot\frac{3}{4}a^2$ $\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \underline{\underline{\frac{3\pi\varepsilon_0 a^2}{2d}}}$

2a/ alternativ: Dela in plattorna i tunna ringar med radie r och bredd dr $\Rightarrow$ Kapacitans $dC = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r(r)dS}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r(r)}{d}2\pi r\,dr$

Parallellkopplade ringar $\Rightarrow C = \int dC = \ldots = \underline{\underline{\frac{3\pi\varepsilon_0 a^2}{2d}}}$

2b/ $\Delta V =$ konst oberoende av r. Ingen variation i z-led

$\Rightarrow E =$ konst ; $D = \varepsilon_0\varepsilon_r(r)E$ beror av r $\Rightarrow \varrho_s$ beror av r