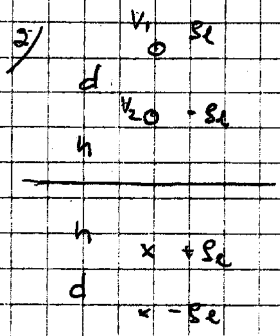
Lösningar till tentamen i Elektromagnetiska fält E3

2002-12-20 EP

1/ Se föreläsningsanteckningar eller Cheng

2/



Inför $\pm \rho_l$ på trådarna. Spegla i planet

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2(h+d)}{a} + \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{2h+d} \\ V_2 = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a}{2h} + \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h+d}{d} \end{cases}$$

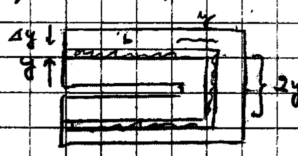
$$\Rightarrow C = \frac{\rho_l \ell}{V_1 - V_2} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln\left[\dfrac{4h\, d^2 (h+d)}{a^2 (2h+d)^2}\right]}}$$

3/

1/ Undre gräns: lägg V = konst-ytor enl fig:

$$\Rightarrow R_u = \frac{b}{\sigma d a}\cdot 2 = \frac{2sb}{a}$$

2/ Övre gräns: tvinga strömmen följa enl fig

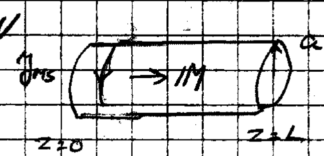


Resistans $\Delta R = \dfrac{b+y+2y+y+b}{\sigma d\, \Delta y} = \dfrac{s(4y+2b)}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta G}$

parallella resistanselement

$$\Rightarrow G = \int dG = \frac{1}{4s}\int_0^a \frac{dy}{y+b/2} = \frac{1}{4s}\ln\frac{a+b/2}{b/2}\ ; \quad R_ö = \boxed{\frac{4s}{\ln\left(1+\frac{2a}{b}\right)}}$$

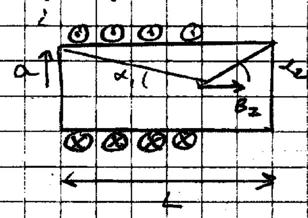
4/



$$\begin{cases} J_M = \nabla \times M = 0 \\ J_{MS} = M \times \hat{n} = \hat{z} M_0 \times \hat{r} = \hat{\varphi} M_0 \end{cases} \qquad M = \hat{z} M_0$$

ytströmtäthet på cylinderns yta.

Jämför en cirkulär spole med N varv och ström i



På z-axeln $B_z = \dfrac{\mu_0 N i}{2L}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$

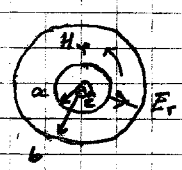
i spolens mitt är $\alpha_1 = \alpha_2$; $\cos\alpha = \dfrac{L/2}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$

Ni motsvaras av $J_{MS} L = M_0 L$

$$\Rightarrow B_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0 M_0}{2}\, 2\cdot\frac{L/2}{\sqrt{a^2+(L/2)^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 M_0 L}{2\sqrt{a^2 + L^2/4}}}$$

$$H_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{B_z}{\mu_0} - M_0 = \boxed{-M_0\left[1 - \frac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2/4}}\right]}$$

5/ TEM våg i koaxialkabel



$$\mathbb{E}(r,z,t) = \hat{r}\, E_0 \frac{a}{r} \cos(\omega t - \beta z) \qquad a<r<b$$

utbredningsriktning $\hat{k} = \hat{z}$

a/ $\mathbb{H} = \frac{1}{Z}\hat{k}\times\mathbb{E}$ gäller för TEM våg $\quad \underline{\underline{Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}}} \qquad \hat{z}\times\hat{r} = \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{H}(r,z,t) = \hat{\varphi}\,\frac{E_0}{Z}\,\frac{a}{r}\cos(\omega t-\beta z)}} \quad a<r<b \qquad \hat{r}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$$

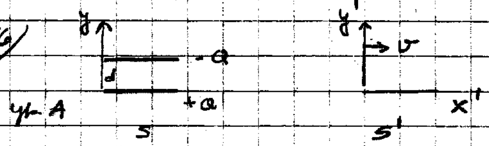
b/ $\$(t) = \mathbb{E}\times\mathbb{H} = \hat{z}\,\frac{E_0^2 a^2}{Z\, r^2}\cos^2(\omega t - \beta z) \qquad \langle\cos^2(\ldots)\rangle = \frac{1}{2}$

$$\$_{medel} = \hat{z}\,\frac{E_0^2 a^2}{Z\, r^2}\cdot\frac{1}{2} \qquad a<r<b$$

Effekt i z-led: integrera Poyntingvektorn över tvärsnittsytan

$$P_{medel} = \int \$_{medel}\cdot d\mathbb{S} = \frac{E_0^2 a^2}{Z\cdot 2}\int_a^b \frac{1}{r^2}\, 2\pi r\, dr = \underline{\underline{\frac{E_0^2 a^2}{Z}\,\pi \ln\frac{b}{a}}}$$

6/



a/ I system S

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ plattkondensator, randeffekter försummas

$\mathbb{E} = \hat{y}\,\frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ (mellan plattorna) (Gauss lag)

$E_x = 0\,, \quad \mathbb{B} = 0$

b/ Transformera fälten till system S'

$$E_x' = E_x = 0\ ; \quad E_y' = \gamma E_y\ ; \quad E_z' = 0\ ; \quad \mathbb{B}_\perp' = \gamma\left(\underbrace{\mathbb{B}_\perp}_{0} - \mathbb{V}\times\mathbb{E}/c^2\right)$$

$$\Rightarrow E_y' = \hat{y}'\,\gamma\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\ , \quad B_z' = -\gamma\,\frac{v\,Q}{\varepsilon_0 A\, c^2} \qquad \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$

Kapacitans i C': $\quad \Delta V' = \int_0^d \mathbb{E}'\cdot\hat{y}\,dy = E_y'\cdot d = \gamma E_y d$

$$\Rightarrow C' = \frac{Q'}{\Delta V'} = \frac{Q}{\gamma E_y d} = \frac{Q}{\gamma\frac{Q}{\varepsilon_0 A}d} = \frac{\varepsilon_0 A}{\gamma d} < C \quad \text{ty } \gamma > 1$$

[Kan också beräknas rent geometriskt: längder i rörelseriktningen, dvs x-led, verkar kortare från S' sett. Längder $\perp \hat{x}$ är opåverkade $\Rightarrow$ en sida i ytan A verkar kortare
$\Rightarrow A' = \frac{A}{\gamma} \quad \Rightarrow C' = \frac{\varepsilon_0 A'}{d'} = \frac{\varepsilon_0 A}{d\,\gamma} = \frac{1}{\gamma}C$]

Förklaring till B'-fältet:

S' ser $\pm Q$ dvs E'-fält. S' ser laddningen i rörelse dvs ström (ytströmtäthet J_s' i $-\hat{x}$-led på planet $y'=0$ och J_s' i $+\hat{x}$-led på planet $y'=d$) $\Rightarrow$ B'-fält i $-\hat{z}$-led mellan plattorna.